



Vibrations non-linéaires des structures fissurées : Application aux rotors de turbines

Saber El Arem

► To cite this version:

Saber El Arem. Vibrations non-linéaires des structures fissurées : Application aux rotors de turbines. Matériaux. Ecole des Ponts ParisTech, 2006. Français. NNT : . tel-00325964

HAL Id: tel-00325964

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00325964>

Submitted on 30 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Mécanique, Structures et Matériaux

par

Saber EL AREM

Sujet de la thèse :

Vibrations non-linéaires des structures fissurées :

Application aux rotors de turbines

soutenue à Champs-sur-Marne le 26 janvier 2006

devant le jury composé de :

Alain LEGER

LMA, Marseille

Rapporteur

Alain MILLARD

CEA, Saclay

Rapporteur

Habibou MAITOURNAM

LMS, École Polytechnique

Président

Christophe VARÉ

EDF R&D, Site des Renardières

Examineur

Quoc-Son NGUYEN

LMS, École Polytechnique

Directeur de thèse

Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier **Bernard Halphen**, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) de l'École Polytechnique, pour m'avoir accueilli au LMS et permis, ainsi, d'évoluer dans un cadre scientifique idéal et profiter d'excellentes conditions de travail.*

*Je voudrais également remercier vivement mon directeur de thèse **Quoc-Son Nguyen** pour avoir dirigé mes premiers pas de chercheur en mécanique et pour la liberté qu'il m'a laissée dans l'organisation de mon travail. Pourtant difficile à admettre parfois, cette pédagogie est une vraie école à la vie et à l'autonomie, elle permet d'apprendre à trouver les bonnes routes soi-même.*

*Ce travail n'aurait certainement pas vu le jour sans les conseils avisés de **Habibou Maitournam** qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Pour m'avoir fait confiance, aidé pendant les moments de doute et d'incertitude tant sur le plan scientifique qu'humain, je lui adresse ma plus sincère gratitude.*

*Mes vifs remerciements sont également adressés à tous les membres de mon jury : **Alain Léger** et **Alain Millard** pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter mon mémoire. Leurs remarques, respectives, sur la dynamique non-linéaire en présence de chocs et la construction d'un élément fini de poutre fissuré m'ont été d'une grande utilité. **Christophe Varé** m'a accueilli, il y a quelques années, à l'unité vibrations des machines tournantes du département Analyses Mécaniques et Acoustique (AMA) de la division R&D d'EDF, ensuite il a accepté de participer à mon jury de thèse, je l'en remercie.*

*Je profite pour remercier vivement **Stéphane Andrieux** directeur du LAMSID et ex-directeur du département AMA, et Pierre Verrier, ingénieur chercheur à la division R&D d'EDF, pour leurs conseils et les discussions fructueuses qu'on a eues concernant la prise en compte des effets du cisaillement dans la loi de comportement d'une section de rotor fissurée.*

*Je souhaite également adresser mes vifs remerciements à Monsieur **Huy Duong Bui** dont la modestie et la générosité me marqueront à jamais. Ses domaines de compétences sont*

tellement vastes et riches qu'à travers les discussions que j'ai eues avec lui, il m'a appris énormément de choses en mécanique et m'a invité à m'interroger sur quelques idées qui, auparavant, me paraissaient évidentes telles que le Principe de Saint Venant. Il m'a honoré en acceptant mon invitation pour assister à ma soutenance. Qu'il sache que je serais toujours reconnaissant.

Ky Dang Van et **Jean Salençon** ont été très sympathiques et accueillants. Lors de leurs cours de *Calcul à la Fatigue* et de *MMC*, ils m'ont montré une approche de la mécanique tout à fait passionnante, je les en remercie.

Je ne saurais jamais remercier assez mes parents pour leur présence, leur encouragements et leur soutien inconditionnel. Je leur dédie ce travail.

Mes pensées vont aussi à mes frères et soeurs, mes beaux-frères, mes neveux et nièces et toute ma famille en Tunisie.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à mes amis et collègues du LMS : Abdelbacet Oueslati, Alexandre Kane, Amna Rekik et Éva Héripré avec qui j'ai partagé des moments très agréables ; et de l'ENSTA : Ziad Moumni et Frédéric Roger. Je les remercie d'avoir été présents lorsque tout paraissait sombre. Je remercie également mes amis les nouveaux doctorants du LMS, Michel Eid, José Losada, Fabien Szmytka pour leur sympathie et gentillesse et leur souhaite une très bonne continuation dans leurs travaux de recherche.

Merci à mes amis : Sofiane Soussi du CMAP, Karim Miled du LCPC, Sami Montasser et Ghazi Hassen du LMSGC, Hatem Ben Njima de l'Université Paris1, Vanessa Wood du MIT pour leur soutien durant ces quelques années de thèse.

... à mes parents pour leur patience et leur immense générosité.

... Les monomaniaques de tout poil,
les gens qui sont possédés par une seule idée
m'ont toujours spécialement intrigué,
car plus un esprit se limite,
plus il touche par ailleurs à l'infini.
Stefan ZWEIG (1881-1942), *Le joueur d'échecs*.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modélisation des rotors fissurés : État de l’art	5
1.1 Introduction	7
1.2 Modélisation des structures fissurées	7
1.2.1 Modélisation de la section fissurée par une flexibilité locale	8
1.2.2 Mécanisme de respiration de la fissure	10
1.3 Vibrations des rotors fissurés	15
1.4 Présentation du modèle de fissure développé à EDF	17
1.5 Conclusions	19
2 Poutre fissurée en flexion avec prise en compte des effets de cisaillement	21
2.1 Présentation	23
2.2 Rappel sur les poutres de Timoshenko	24
2.2.1 Champ de déplacement de Timoshenko	24
2.2.2 Tenseurs de déformations et de contraintes	24
2.2.3 Efforts intérieurs	25
2.2.4 Equations d’équilibre	27
2.3 Modèle de poutre fissurée	27
2.3.1 Description du modèle	27
2.3.2 Problème de Saint Venant	28
2.4 Formulation du problème d’élasticité avec contact unilatéral	30
2.4.1 Motivation	30
2.4.2 Conditions aux limites	31

2.4.3	Equations du problème	33
2.4.4	Remarques sur la réalisation des conditions aux limites avec le <i>Code_Aster</i> ®	34
2.4.5	Propriétés de la fonction énergie	34
2.5	Equations d'équilibre de l'élément de poutre fissuré	36
2.6	Loi de comportement de la section de poutre fissurée	37
2.6.1	Souplesse apportée par la section fissurée	37
2.6.2	Expression de la loi de comportement	39
2.6.3	Identification de la rigidité de l'élément discret	39
2.7	Étude du problème "plan"	42
2.7.1	Ecriture discrétisée de la fonction souplesse	43
2.7.2	Application de la démarche à une fissure à fond droit de profondeur 50%	44
2.7.3	Validation du modèle	48
2.7.4	Conclusions	48
2.8	Étude de la flexion bi-axée avec prise en compte des effets de cisaillement	49
2.8.1	Ecriture de la fonction énergie	50
2.8.2	Prise en compte des effets de cisaillement	53
2.8.3	Loi de comportement de la section fissurée	55
2.8.4	Application de la démarche à une fissure à fond droit de profondeur 50%	57
2.8.5	Validation du modèle	58
2.9	Quelques remarques sur la prise en compte de la torsion	60
2.10	Conclusions	64
3	Rotors fissurés : Exploration numérique de quelques modèles simples	65
3.1	Présentation	67
3.2	Rappel sur les schémas d'intégration numérique utilisés	67
3.2.1	Le schéma de Newmark	68
3.2.2	La méthode d'intégration numérique α de Hilbert, Huygues et Taylor (HHT)	69
3.2.3	Les méthodes de Runge-Kutta	70
3.3	Discrétisation des signaux	71
3.3.1	Problème d'échantillonnage	71

3.3.2	Transformée de Fourier tronquée ou Discrète (TFD)	72
3.3.3	Transformée de Fourier rapide : FFT	73
3.4	Système dynamique à deux paramètres	74
3.4.1	Description	74
3.4.2	Loi de comportement de la section fissurée	75
3.4.3	Les équations dynamiques du système	76
3.4.4	Cas d'un rotor sans fissures	77
3.4.5	Etude de rotors en présence de fissures	81
3.4.6	Baisse de la vitesse critique due à la présence de fissures	83
3.4.7	Forme des orbites et des diagrammes de phase en présence de fissures	85
3.5	Etude de la vibration d'un rotor fissuré en flexion	86
3.5.1	Prise en compte des effets d'amortissement	90
3.5.2	Présentation de quelques résultats	90
3.5.3	Prise en compte des effets de cisaillement	93
3.6	Construction d'un élément fini de poutre fissuré	94
3.6.1	Etude du comportement vibratoire d'un rotor fissuré en flexion	101
3.7	Conclusions	103
4	Étude analytique du modèle à deux paramètres	107
4.1	Présentation	109
4.2	Choix de la méthode de résolution	110
4.3	Système dynamique à deux paramètres : rappel	110
4.4	Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_s	112
4.4.1	Equations dynamiques : Cas d'oscillateurs découplés	112
4.4.2	Equations dynamiques : Cas d'oscillateurs couplés	116
4.5	Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_2	120
4.5.1	Equations dynamiques	120
4.5.2	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs découplés	124
4.5.3	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs couplés	128
4.6	Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_3	133

4.6.1	Equations dynamiques	133
4.6.2	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs découplés	135
4.6.3	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs couplés	137
4.7	Étude de stabilité : théorie de Floquet	141
4.7.1	Oscillateur à un degré de liberté	143
4.7.2	Oscillateur à plusieurs degrés de liberté	148
4.7.3	Application au système dynamique à 2 ddl	152
4.8	Conclusions	156
Conclusions et perspectives		159

Introduction générale

L'apparition puis la propagation d'une fissure dans un arbre de machine tournante est un phénomène qui doit être pris en compte aussi bien par les constructeurs que par les exploitants de ces machines. Afin de s'assurer que leurs installations ne sont pas endommagées, ces derniers disposent de quelques outils dont la surveillance vibratoire en ligne est l'un des plus couramment employés. Basée sur une mesure des vibrations aux paliers, elle permet un suivi continu de l'état mécanique des matériels et un diagnostic précoce des principaux défauts.

Il y a quelques années, la méthode la plus fréquemment utilisée consistait en un examen statique de l'arbre nécessitant des arrêts fréquents préjudiciables au rendement économique. Ces arrêts conduisaient à des passages répétés aux fréquences de résonance favorisant la propagation des fissures existantes et l'apparition de nouvelles fissures.

D'autre part, les techniques traditionnelles telles que les ultrasons et les radiations infrarouges ne sont pas très efficaces dans ce domaine où le niveau de bruit est très élevé et l'arrêt des machines est à éviter.

La surveillance vibratoire des machines tournantes reçoit, de ce fait, un intérêt croissant de la part des chercheurs et des exploitants. Elle permet, à partir des vibrations régulièrement recueillies, de détecter d'éventuels dysfonctionnements et de suivre leur évolution dans le but de planifier ou reporter une intervention mécanique. Ce suivi continu est réalisé pendant le fonctionnement de la machine. Ceci évite les arrêts fréquents conduisant à une baisse de production, d'une part, et des passages répétés aux fréquences de résonance favorisant le phénomène de fissuration, d'autre part.

Néanmoins, le caractère exceptionnel des phénomènes de fissuration des rotors rend difficile l'évaluation de la fiabilité des algorithmes développés spécifiquement pour leur détection et dont la validation par des modèles expérimentaux est souvent délicate et coûteuse. Les méthodes de modélisation numérique constituent alors une alternative intéressante au retour d'expérience car elles permettent d'étudier l'impact d'une fissure sur le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre et de vérifier la pertinence des descripteurs utilisés par les systèmes de surveillance.

Le retour d'expérience sur le parc CP0-CP1 d'EDF a montré la présence de fissures sur 60 % des 78 rotors Basse Pression (BP).

L'analyse du retour d'expérience met en évidence la grande diversité des fissures affectant les rotors. Les fissures constatées s'initient le plus souvent au droit des extrémités des clavettes de l'entretoise centrale côté disque 8/9 (au centre du rotor). Dans cette zone, on trouve trois clavettes, disposées

à 120° l'une de l'autre. Selon les cas, la fissuration est mise en évidence sur les trois clavettes, sur deux d'entre elles ou sur une seule. D'autre part, les fissures peuvent se propager suivant divers scénarios : propagation simultanée de l'ensemble des fissures intéressant une même section conduisant à une fissure globale pratiquement axi-symétrique [114] ou développement d'une fissure unique accroissant l'anisotropie de la section fissurée. La fissure la plus importante est de 100 mm de profondeur (soit 10 % du diamètre du rotor), elle a été détectée sur un des rotors de la ligne d'arbre de Dampierre où une indication ultrasonore semble révéler qu'une fissure se développe entre deux clavettes.

Les anciens modèles de fissure intégrés dans le passé dans le code de calcul des lignes d'arbres CADYAC (anciennement appelé CADYRO), ne permettent pas de prendre en compte cette diversité. Ces modèles s'appuient sur des résultats semi-analytiques et sont très limités en ce qui concerne la diversité des fissures prises en compte. Par ailleurs, ces modèles ne prennent en compte les phénomènes d'ouverture/fermeture des fissures sous l'action des chargements que de façon assez grossière [4] et par l'introduction de fonctions de fermeture plus ou moins arbitrairement choisies. Une action a été donc engagée par le département Analyses Mécaniques et Acoustique (AMA) afin de pouvoir traiter tout cas qui pourrait se présenter à moyen terme.

Dans ce cadre, une analyse théorique a été réalisée par Andrieux [4] afin de déterminer la loi de comportement en flexion bi-axée d'une poutre fissurée avec prise en compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure. Cette étude a permis l'amélioration de l'ancien modèle de fissure implanté dans le code CADYAC.

Cette loi est tout à fait appropriée pour la modélisation des fissures affectant les rotors des turbines du parc CP0-CP1 qui ont été observées environ à mi-portée du fût, zone où les sollicitations peuvent se réduire aux effets du moment de flexion sous poids propre.

En revanche, dans le cas des pompes primaires, par exemple, les fissures apparaissent dans la zone d'application de l'effort hydraulique. Les effets de la flexion sous poids propre étant négligeables, il faut, comme le montrent les retours d'expérience internationaux, considérer les effets du cisaillement dans l'étude de ces matériels.

Ce travail de thèse qui entre dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique (LMS) et le département AMA de la division recherche et développement d'EDF, vise les deux objectifs suivants :

- la prise en compte des effets de cisaillement dans l'écriture de la loi de comportement d'une section de rotor (poutre) fissurée,
- l'exploration par des modèles numériques, semi-analytiques, voire analytiques de la réponse vibratoire d'un rotor de machine tournante affecté de fissures afin d'exhiber les paramètres susceptibles de favoriser la détection des fissures dans le cadre d'une procédure de surveillance.

Ce document se compose, ainsi, de quatre chapitres. Le premier, est consacré à un rappel sur les tentatives de modélisation les plus connues utilisées depuis les années 70 pour décrire le comportement des structures affectées de fissures. On y rappelle brièvement les principaux modèles qui font encore références dans le domaine de la surveillance des machines tournantes. On verra, en

particulier, l'intérêt croissant que reçoit la surveillance vibratoire en ligne de la part des chercheurs et des exploitants.

Dans le second chapitre de cette thèse, on expose en détails les différentes étapes permettant la prise en compte des effets de cisaillement dans la loi de comportement d'une section de rotor fissurée. On commence par l'étude de la flexion plane, le problème est alors nommé **plan**, ensuite, on présente la démarche de prise en compte des effets du cisaillement dans le cas le plus général en tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres. En particulier, la démarche peut être appliquée à toute géométrie de fissure y compris les fissures multiples affectant une même section. Quelques remarques sur la prise en compte des effets de torsion seront données en fin de ce chapitre.

Le troisième chapitre est entièrement consacré à l'étude, par voie numérique, de la réponse vibratoire de rotors affectés de fissures. On commence par un système à 2 degrés de liberté (ddl) formé de deux barres rigides reliées par un ressort non-linéaire modélisant la section fissurée. Ensuite, on essaie d'enrichir notre modèle en considérant, au lieu des barres, des éléments poutres de Timoshenko en flexion sous les effets du poids propre de la structure et de la rotation imposée au rotor autour de son axe. Dans la dernière partie de ce chapitre, on présentera une méthode de construction d'un élément fini de poutre fissuré qu'on utilisera pour l'étude de la réponse vibratoire d'un arbre fissuré.

Après s'être construit une idée plus claire sur le comportement vibratoire de telles structures, on présente, dans le quatrième chapitre, les résultats de la résolution semi-analytique, voire analytique dans certaines configurations simples, des équations dynamiques d'un système de rotor fissuré à 2 ddl. Différentes fonctions de description du mécanisme de respiration de la fissure sont, alors, considérées. Le système différentiel résultant est de second ordre, linéaire à coefficients périodiques (système d'équations de Hill) dont on examinera, vers la fin de ce chapitre, la stabilité linéaire des solutions périodiques par la méthode de Floquet.

Chapitre 1

Modélisation des rotors fissurés : État de l’art

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Modélisation des structures fissurées	7
1.2.1	Modélisation de la section fissurée par une flexibilité locale	8
1.2.2	Mécanisme de respiration de la fissure	10
1.3	Vibrations des rotors fissurés	15
1.4	Présentation du modèle de fissure développé à EDF	17
1.5	Conclusions	19

1.1 Introduction

Les arbres de machines tournantes constituent des structures assez complexes à analyser. Suivant les applications auxquelles ils sont destinés, ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses.

L'étude de la dynamique d'un arbre affecté de fissuration est un problème délicat qui recouvre différents aspects techniques et mathématiques. L'analyse d'un tel système nécessite une modélisation appropriée tant pour la fissure que pour l'arbre.

Ce chapitre est consacré à un rappel sur les principaux travaux de modélisation des rotors affectés de fissures. On commence par présenter les différents modèles et techniques permettant d'identifier ou d'approcher la flexibilité locale due à la présence de fissures dans un élément de structure. Ensuite, les différentes méthodes de représentation du mécanisme d'ouverture-fermeture de la fissure au cours de la rotation de l'arbre sont passées en revue. Dans la troisième partie de ce chapitre, on rappelle brièvement les principales tentatives de caractérisation de la réponse vibratoire d'un arbre fissuré. La dernière partie est consacrée à la présentation du modèle de fissure développé à EDF. Une meilleure description de ce modèle sera donnée au second chapitre avant de présenter la démarche permettant d'y introduire les effets du cisaillement.

1.2 Modélisation des structures fissurées

Aux USA, une grande partie des centrales de production d'électricité ont été construites au cours des années 60 et dimensionnées pour une durée de vie de 30 ans [44]. La crise énergétique des années 70 a conduit à un ralentissement de la construction de nouvelles centrales. Malgré l'inspection des machines avant le démarrage et au cours de l'exploitation, un grand nombre de ruptures d'arbres dues à la présence de fissures ont été enregistrées. D'après Bently [18], durant une période de 10 ans, au moins 28 cas de rupture ont été enregistrés dans l'industrie de l'énergie aux USA.

Depuis les années 80, l'intérêt des chercheurs à caractériser les structures comportant des fissures ne fait que croître. Entre le début des années 70 et la fin des années 90, plus de 500 articles concernant les structures fissurées ont été publiés [44]. Dans les 10 dernières années, on a pu compter, outre les papiers présentés pour des congrès ou des conférences spécialisés, plus de 1200 articles dont plus d'une centaine est consacrée au rotors. En effet, outre l'industrie de l'énergie, les rotors sont omniprésents dans les industries aéronautique, aérospatiale, automobile et même une industrie plus légère telle que celle de l'électroménager (machine à laver,...).

L'étude du comportement vibratoire d'un arbre fissuré recouvre plusieurs branches de la mécanique et des mathématiques. Il s'agit d'un système non-linéaire complexe nécessitant, pour une description pertinente, une modélisation fine et précise de l'arbre ainsi que des fissures permettant l'identification et le calcul des paramètres caractérisant leur présence.

L'analyse des études menées pour la modélisation des rotors fissurés montre que les modèles actuels reposent sur deux principes fondamentaux :

- la représentation de la section fissurée par une **flexibilité locale**,
- la prise en compte d'un mécanisme d'ouverture-fermeture de la fissure, encore appelé **respiration**.

Nous présentons, ci-dessous, les règles générales qui déterminent la prise en compte de ces deux principes en dynamique des rotors.

1.2.1 Modélisation de la section fissurée par une flexibilité locale

La présence d'une fissure dans un élément de structure conduit à une concentration d'énergie à proximité des lèvres et introduit une flexibilité locale. Ceci est connu depuis longtemps. Kirmsher [76] et Thomson [112] sont les premiers à avoir essayé de quantifier la réponse vibratoire d'une structure en présence d'une discontinuité due à une petite rainure. La discontinuité, au niveau de l'entaille, a été modélisée soit par un moment de flexion additionnel local, soit par une réduction locale de la section transversale de l'élément dont l'estimation était basée sur des résultats expérimentaux.

Les premières tentatives d'analyse et de calcul de la flexibilité locale d'une région fissurée d'un élément de structure sont dues à Irwin [72, 73], Bueckner [24, 25], Westmann [122] en reliant la flexibilité locale aux facteurs d'intensité de contraintes.

Dans le cas d'une structure élastique contenant une fissure de profondeur a , le théorème de Castigliano permet de calculer, en tout point de la structure, le vecteur déplacement additionnel \mathbf{u} dû à la présence de la fissure sous l'action du vecteur chargement \mathbf{P} par

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \int_0^a \mathbf{G}(a) da \quad (1.1)$$

ensuite les termes de la matrice de flexibilité locale c_{ij} sont calculés par la formule

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a \mathbf{G}(a) da, \quad 1 \leq i, j \leq 6 \quad (1.2)$$

En 1957, Irwin [72, 73] donna, pour les milieux bidimensionnels relativement simples et en ignorant les phénomènes plastiques en fond de fissure, la forme du premier terme, singulier, du développement limité des contraintes au voisinage d'un front de fissure. Dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique et des petites perturbations, le taux de restitution de l'énergie \mathbf{G} et les facteurs d'intensité de contraintes (K_I , K_{II} et K_{III}) au même point sont reliés par la formule d'Irwin

$$\mathbf{G} = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.3)$$

En hypothèse de déformations planes, on a $E' = E$ et en hypothèse des contraintes planes, on a $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$. E désigne le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Depuis, les efforts se sont multipliés pour l'évaluation des coefficients d'intensité de contraintes pour différentes géométries de fissures et de structures. Il existe de nombreuses solutions analytiques

ou semi-analytiques pour les solides fissurés infinis ou de forme extérieure simple compilées dans des recueils comme celui de Tada, Paris et Irwin [111].

Liebowitz et al. [80, 79] et Okamura et al. [92] ont examiné les effets de la présence d'une rainure sur la stabilité au flambage élastique des colonnes. En combinant les résultats de la mécanique de la rupture aux résultats expérimentaux de Brown et al. [23], ils ont proposé une formule pour l'identification de la flexibilité locale d'une poutre de section rectangulaire fissurée en flexion. Anifantis [6] a suivi la même formulation pour l'examen de stabilité des colonnes fissurées, ensuite Dimarogonas [38], dans les années 80, pour examiner la stabilité des anneaux et des tubes comportant des fissures longitudinales. Anifantis et Dimarogonas [8, 9] ont poursuivi l'étude de stabilité des colonnes fissurées sous différents cas de chargement et en représentant la fissure par une flexibilité locale calculée à partir des concepts de mécanique de la rupture.

Dans deux notes techniques à la NASA, Gross et Srawley [60, 61] ont identifié les coefficients d'intensité de contraintes et les termes de la matrice de flexibilité locale pour des éléments fissurés soumis à des efforts de flexion et de traction. Ils ont, en particulier, identifié les termes de couplage. De même, Rice et Levy [103] ont examiné ce couplage dans leur étude des plaques élastiques fissurées.

Dimarogonas et Paipetis [45], Dimarogonas [39, 40, 41], et Anifantis et Dimarogonas [7] ont introduit la matrice de flexibilité (6×6) d'une section fissurée. Ils ont noté qu'elle contient des termes extra-diagonaux conduisant au couplage des vibrations longitudinale et transversale. En négligeant les effets de torsion, ils ont évalué les termes de cette matrice (5×5) pour une section rectangulaire contenant une fissure transversale. Papadopoulos et Dimarogonas [98, 99, 100], et Ostachowicz et Krawczuk [94] ont évalué tous les termes de la matrice (6×6) d'une section de poutre de Timoshenko fissurée pour tout cas de chargement.

Dans le cas d'une géométrie cylindrique telle que celle des rotors de turbines, il n'existe pas d'expressions analytiques des facteurs d'intensité de contraintes, ce qui a conduit Dimarogonas [45] à discrétiser la surface fissurée en un ensemble d'éléments indépendants. Sur chacune de ces surfaces élémentaires, les coefficients d'intensité de contraintes peuvent être approchés par des formules analytiques [111], ensuite le taux de restitution d'énergie est déterminé par intégration, cf. figure 1.1.

L'équation (1.2) devient

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a \int_{-b}^b \mathbf{G}(a, \xi) d\xi da \quad (1.4)$$

Dimarogonas [35, 36], a identifié expérimentalement, sur des éprouvettes en verre-epoxide, les flexibilités locales dues à la présence d'une fissure de fatigue et a obtenu des résultats en bonne concordance avec la démarche décrite ci-dessus.

Si elle offre l'avantage d'être facilement applicable dans un algorithme numérique, cette méthode n'en reste pas moins une approximation dont la précision n'est pas établie [115]. D'autre part, des problèmes de convergence de la procédure d'intégration ont été mis en évidence lorsque la profondeur de la fissure dépasse le rayon de la section du rotor [1, 43]. Une solution permettant

de surmonter cette difficulté a été proposée par Papadopoulos [97]. Elle consiste à calculer de façon approchée l'intégrale double de l'équation (1.4) en considérant des valeurs de ξ telles que $0.90b \leq |\xi| \leq 0.95b$ lorsque la profondeur de la fissure a dépasse le rayon de la section du rotor. Enfin, la généralisation de cette démarche à toute géométrie de section fissurée est complexe, voire impossible dans certains cas où la fissure n'est pas connexe.

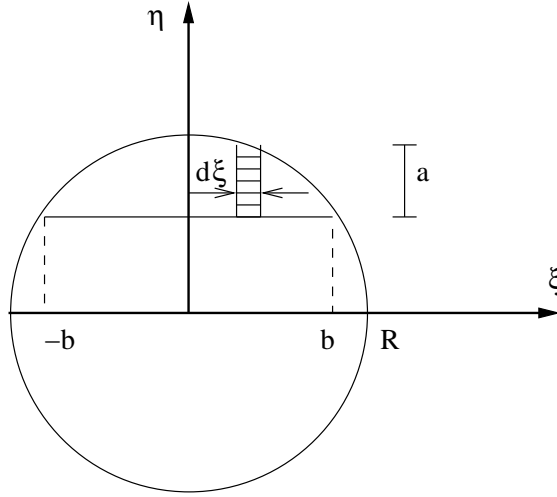


FIG. 1.1: Schéma d'une section de rotor fissurée

En conclusion, les solutions apportées par la mécanique de la rupture pour le calcul des flexibilités locales dues à la présence de fissures appliquées à des structures généralement de géométries complexes ne permettent que des approximations plus ou moins grossières [22]. Il faut, de ce fait, recourir, là encore, aux méthodes numériques.

Pour identifier numériquement les coefficients de flexibilité locale dus à la présence d'une fissure, plusieurs tentatives ont été faites. Dirr et Schmalhorst [47], et Imam et al. [71] ont utilisé une modélisation par éléments finis tridimensionnels avec un comportement élastique. Ostachowics et al. [93] ont utilisé des éléments triangulaires et un comportement élastoplastique du matériau. Go et Lin [57] ont rapporté que l'utilisation de la méthode des éléments finis pour modéliser la variation des contraintes en fond de fissure nécessite des maillages très raffinés et des temps de calculs importants tant la procédure converge lentement. D'autres types d'éléments plus appropriés ont été proposés pour aboutir à des coûts de calculs plus faibles.

1.2.2 Mécanisme de respiration de la fissure

Le second principe essentiel de la modélisation des structures fissurées est la prise en compte d'un mécanisme d'ouverture fermeture de la fissure. Pour mettre en évidence ce mécanisme, considérons une poutre simplement appuyée, soumise aux effets uniques de son poids propre et à une rotation imposée autour de son axe. On suppose également que cette vitesse de rotation imposée est faible. La poutre de section circulaire comporte à mi-portée une section fissurée. La fissure est à fond

droit et sa profondeur a est inférieure au rayon de la section. Pour une section non fissurée, les efforts appliqués à la poutre conduisent à une répartition antisymétrique du champ de contraintes par rapport à la fibre neutre. Lorsque la poutre tourne, la partie fissurée passe périodiquement de zones tendues (lorsqu'elle est en bas) à des zones comprimées (lorsque elle est en haut) et par conséquent elle s'ouvre et elle se ferme périodiquement : on dit qu'elle **respire**, cf. figure 1.2.

Ainsi, selon la position angulaire de la fissure, celle-ci est soit en compression, donc fermée, soit en tension, alors ouverte, soit enfin dans une situation intermédiaire ce qui l'amène à être partiellement ouverte. Ces deux derniers cas conduisent à des répartitions de contraintes locales très différentes de celles de la section non fissurée.

La non-linéarité engendrée par ce mécanisme induit des comportements vibratoires particuliers qui peuvent constituer des éléments de détection dans le cadre d'une procédure de surveillance. Cependant, l'examen des différentes tentatives de modélisation du comportement de la fissure au

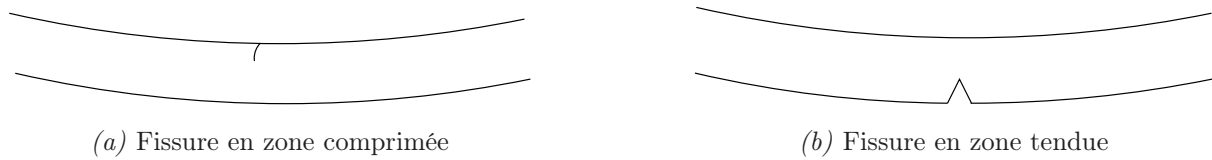


FIG. 1.2: Mise en évidence d'un mécanisme de respiration de la fissure

cours de la vibration, montre qu'on peut distinguer deux grandes familles de modèles de fissures :

- Les premiers, encore utilisés pour l'exploration de la réponse dynamique des rotors fissurés, supposent que la fissure reste toujours ouverte durant la rotation de la structure. Ces modèles sont connus sous le nom de **modèles de fissure ouverte** (*open crack models*),
- la seconde famille de modèles, considère le mécanisme de respiration décrit ci-dessus. On parle alors de **modèles de fissure respirante** (*breathing crack model* ou *closing crack model*).

1.2.2.1. Modèles de fissure ouverte

La plupart des anciens modèles supposent que la fissure est ouverte et qu'elle le reste durant la vibration [27]. Cette modélisation permet d'éviter les problèmes dus aux non-linéarités introduites par le phénomène de respiration de la fissure. Dans la littérature [44], certains font référence à ce modèle par : *the spring hing model* ou *the linear spring model* parce que pour une fissure donnée, la constante du ressort équivalent reste inchangée quelle que soit la direction du chargement.

La simplicité de ce modèle provient donc de l'invariance de la rigidité de l'arbre au cours de la vibration. La fissure peut alors être décrite par une réduction de rigidité qui demeure constante dans le repère lié à l'arbre (repère tournant).

La présence de la fissure introduit des flexibilités différentes dans les deux directions principales de la section. Le comportement vibratoire est, par conséquent, similaire à un rotor avec deux moments d'inertie distincts. En se basant sur ce modèle, Tondl [113] a développé la solution exacte de la réponse vibratoire d'un rotor fissuré en rotation à la fréquence Ω . Cette solution est composée

de la déflexion statique, d'une composante de fréquence Ω et d'une composante de fréquence 2Ω . Dimentberg [46] a exploré la réponse vibratoire d'un rotor dissymétrique, et a observé, dans la réponse vibratoire, l'apparition de composantes selon les harmoniques supérieures de la vitesse de rotation imposée (fréquence d'excitation) et d'autres selon les sous-harmoniques de la vitesse de rotation critique du rotor. Dimarogonas [35, 36] s'est basé sur les travaux de Dimentberg [46] pour développer une méthode de détection des fissures basée sur la seconde harmonique ($2 \times \Omega$). Pafelias [95] a continué les travaux de Dimarogonas à General Electric et a su développer une stratégie de détection de fissures basée sur la seconde harmonique. Le recueil des résultats expérimentaux et des mesures réalisées sur des vrais rotors de turbines lui ont permis le développement d'un instrument de surveillance qu'il a nommé *Crack Detection Monitor*.

Gudmundson [62, 63] a également étudié, par un modèle de fissure ouverte, la vibration de poutres fissurées. Les résultats de son étude, par la méthode des perturbations, de l'effet de fissures de faible profondeur sur les fréquences de résonance, étaient conformes à ceux retrouvés expérimentalement par Wendtland [120] et par Wendtland et Wiederuth [121]. Cette concordance est due au fait que dans le modèle expérimental, les fissures étaient modélisées par des entailles. Gudmundson [63] a remarqué en examinant expérimentalement les effets de fermeture de la fissure que la baisse des fréquences de résonance avec la profondeur de la fissure est beaucoup moins importante que celle observée dans le cas de fissures ouvertes (modélisées par des rainures).

1.2.2.2. Modèles de fissure respirante

En 1944, Kirmsher [76] a observé que si une fissure dans une poutre en béton armé est remplie de poussière ou de matériau cristallisé, ou si ses lèvres entrent en contact au cours de sa vibration, ses effets sur les fréquences de résonance sont similaires à ceux d'une fissure de profondeur plus faible. Cette observation était à l'origine de plusieurs investigations sur les effets de respiration de la fissure.

En 1976, pour une conférence sur la vibration des machines tournantes, trois articles ont été présentés sur la détection des fissures dans les rotors de turbines par examen de la réponse vibratoire. Henry et Okah-Avae [68], Gasch [53], et Mayes et Davies [83] ont présenté un modèle simple pour décrire le mécanisme d'ouverture-fermeture de la fissure. Selon ce modèle, à qui on fait souvent référence par "the switching crack model", ou "hinge model", la fissure est soit totalement ouverte soit totalement fermée. Ainsi, dans le repère tournant ($o\zeta\eta$), le comportement de la structure est linéaire par morceaux ou simplement bilinéaire, cf. figure 1.3. Ce modèle a été appliqué à un arbre flexible sans masse surmonté par un disque rigide. Toute la masse de la structure provient alors du disque tandis que les déformations sont celles de l'arbre, cf. figure 1.3. Ce modèle simple souvent utilisé pour la compréhension des phénomènes liés au comportement des machines tournantes, est connu sous le nom de **rotor De Laval**. D'après les références [53, 83, 68], la fissure est ouverte si $\zeta > 0$ et elle se ferme lorsque $\zeta < 0$. Mayes et Davies [83] ont résolu approximativement l'équation non-linéaire en négligeant l'effet des harmoniques d'ordres supérieurs à 2. Ils étaient les premiers à publier des résultats expérimentaux pour la validation de leur modèle. Le passage du repère tournant au repère fixe a permis l'obtention d'équations différentielles linéaires à coefficients pé-

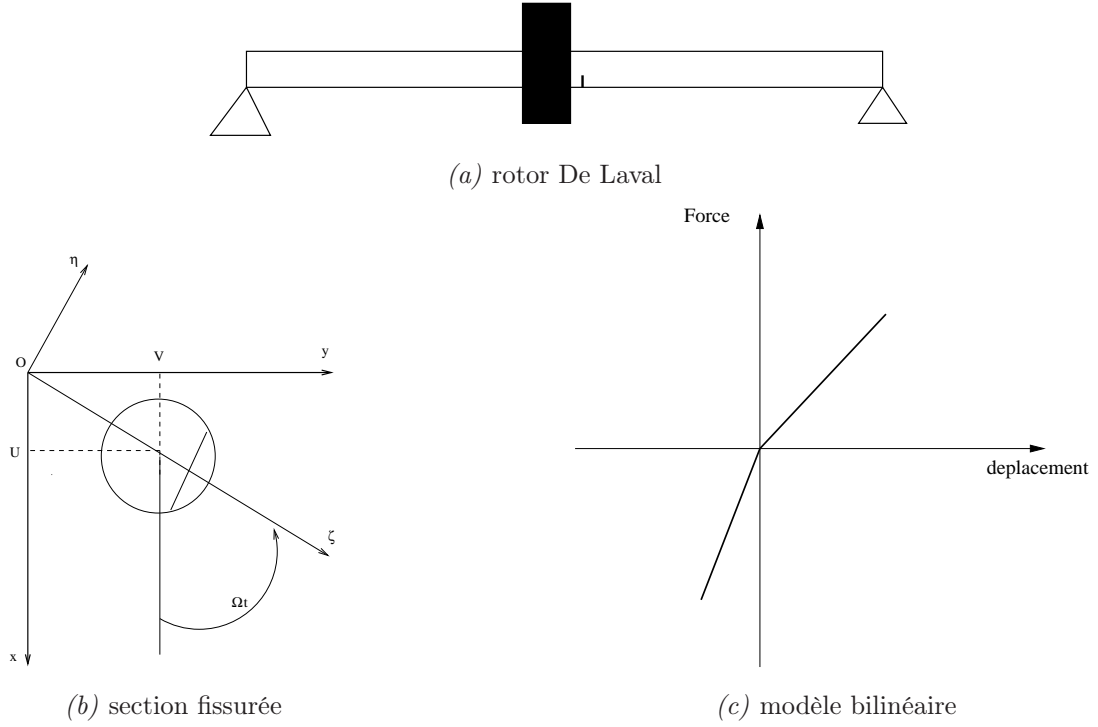


FIG. 1.3: *Premier modèle de respiration d'une fissure dans un rotor De Laval : Switching crack model*

riodiques que Henry et Okah-Avae [68], et Gasch [53], ont résolu sur ordinateur analogique. Ils ont mis en évidence la présence d'harmoniques d'ordres supérieurs et des résonances sous-critiques au passage par des sous-multiples de la première vitesse critique de l'arbre. Des résultats similaires ont été présentés par Ziebarth [125, 124].

Mayes et Davies [84] ont ensuite étudié l'effet de propagation d'une fissure transverse sur la réponse vibratoire d'une machine tournante par différents modèles analytiques et expérimentaux. En 1984, dans deux articles faisant encore références [85, 34], ils ont étendu leur modèle au cas de système à multi-rotors en remplaçant la fissure par une réduction du moment d'inertie et en adoptant une variation périodique de la rigidité plus adaptée aux fissures profondes permettant de tenir compte des pertes de rigidité dans les deux directions principales de la section. Ils ont démontré que la section fissurée peut être représentée par une réduction du moment d'inertie. En se basant sur la méthode de Rayleigh et en utilisant la technique des perturbations, ils ont obtenu la formule suivante

$$\frac{\frac{\Delta I}{I_0}}{1 - \frac{\Delta I}{I_0}} = \frac{R}{l}(1 - \nu^2)F(\mu) \quad (1.5)$$

où ΔI est la diminution du moment d'inertie de la section transversale de rayon R due à la fissure de profondeur a . I_0 désigne le moment d'inertie de la section non fissurée, l la longueur de l'élément et $\mu = \frac{a}{R}$ est la profondeur adimensionnelle de la fissure. $F(\mu)$ désigne la fonction de

souplesse (sans dimension) mesurant la perte relative en moment d'inertie due à la présence de la fissure. Faute d'expressions exactes pour les coefficients d'intensité de contraintes pour les sections circulaires, les auteurs [85] ont validé expérimentalement leur modèle de fissure. Ce modèle est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Bush [26] et les calculs numériques de Martin et al. [67].

Pour la prise en compte d'un mécanisme de respiration de la fissure, Mayes et Davies [85] se sont basés sur les observations expérimentales pour déduire une évolution périodique plus réaliste de la rigidité de la structure en rotation. En particulier, cette nouvelle évolution permet d'avoir une fermeture partielle de la fissure, cf. figure 1.4(b), contrairement au *switching model* où le passage de fissure ouverte à fissure fermée est brutal, cf. figure 1.4(a). L'inconvénient est que Mayes et Davies [85] n'ont pas apporté de justifications théoriques pour la description du mécanisme de respiration proposée.

Si pour les fissures peu profondes, une loi de type *switching model* pourrait rendre compte des principaux phénomènes dus à la présence de la fissure, la nouvelle loi de Mayes et Davies est plus adaptée aux fissures profondes [85, 34, 54].

Dans la figure 1.4, $\Delta K(\Omega t)$ désigne la perte de rigidité périodique due à la fissure et ΔK_{max} sa valeur maximale correspondant à une fissure totalement ouverte.

Dimarogonas et Papadopoulos [101] quant à eux proposèrent, pour variation périodique de la

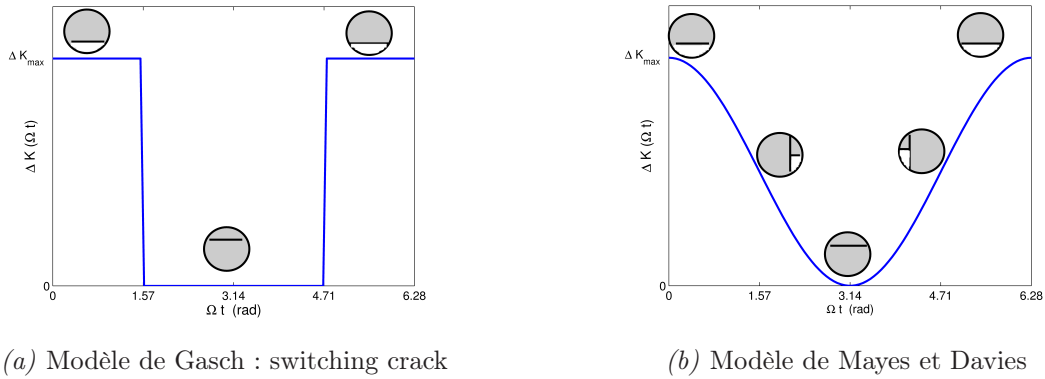


FIG. 1.4: Modèles de respiration de la fissure

rigidité, les quatre premiers termes de la série de Fourier de la fonction passant périodiquement par les quatre points : fissure ouverte, fissure moitié ouverte, fissure moitié fermée et fissure fermée. Bien que ce modèle soit couramment employé aujourd'hui, certaines critiques ont été faites. En particulier la démarche de calcul qui consiste à intégrer le taux de restitution d'énergie sur la surface présumée ouverte ne tient pas compte des conditions de contact unilatéral entre les lèvres de la fissure conduisant à annuler le facteur d'intensité de contrainte K_I à la limite du contact.

1.3 Vibrations des rotors fissurés

Historiquement, le développement de méthodes de détection de fissures en ligne a débuté dans l'industrie de l'énergie. Au sein de General Electric Company, et suite à la rupture brutale d'un rotor de turbine dont l'examen métallurgique indiquait, comme cause principale, la propagation d'une fissure de fatigue, Dimarogonas [35, 36], dans deux rapports internes, commença le développement de sa théorie de vibration des rotors fissurés. Ces travaux ainsi que leur extension à l'étude d'aubages et de poutres fissurées ont été publiés quelques années plus tard [37]. Après 1972, Pafelias [95] a poursuivi les travaux de Dimarogonas, et développa, une technique de détection de fissures basée sur l'harmonique d'ordre 2.

Depuis les années 70, les travaux sur la caractérisation de la réponse vibratoire d'arbres de machines tournantes fissurées ne font que croître. L'ensemble des modèles d'investigation analytiques, numériques et expérimentaux ont été rapportés par Dimarogonas et Paipetis [45], Wauer [119], Entwistle et Stone [50], Dimarogonas [42, 44] et Gasch [54]. La plupart des chercheurs se sont intéressés à l'identification de la baisse des fréquences de résonance due à la fissuration [42, 44, 62, 63] tant l'identification de ce paramètre nécessite des mesures en un seul point de l'arbre.

Gasch [54] a rapporté que, pour des fissures dont la profondeur ne dépassant pas le rayon de la section transversale, un modèle de type *switching* (bilinéaire) est suffisant pour rendre compte des limites de stabilité du rotor affecté.

Papadopoulos et Dimarogonas [99] ont étudié le couplage des vibrations transversale et de torsion en considérant une poutre de Timoshenko et un modèle de fissure ouverte. Ils ont remarqué la présence des fréquences des modes de flexion dans le spectre de la réponse à une vibration en torsion et vice versa. Cette observation a été rapportée comme bon indicateur de présence de fissures. Ces mêmes constatations ont été observées par Ostachowicz et Krawczuk [94] en explorant par éléments finis le couplage flexion-torsion d'un rotor avec fissure ouverte. Papadopoulos et Dimarogonas [98] ont examiné le couplage des modes de vibrations latérales et longitudinales et ont proposé, pour indicateur de présence de fissures, la co-existence des fréquences de deux modes sur le même spectre. Papadopoulos et Dimarogonas [98] ont également remarqué l'importance du couplage traction-flexion et flexion-torsion même pour des fissures de faibles profondeurs.

Wauer [118] a formulé rigoureusement les équations de mouvement d'un arbre comportant une section fissurée. La fissure modélisée souvent par des discontinuités géométriques a été remplacée par une discontinuité de chargement au niveau de la section fissurée. Les effets dus au mécanisme de respiration de la fissure ont également été considérés.

Chondros et al. [27] ont étudié la vibration d'une poutre fissurée en tenant compte du mécanisme de respiration de la fissure, ils ont remarqué une faible diminution des fréquences de résonance due à la fissure et ont conclu que le modèle de fissure ouverte conduit à une surestimation de cette diminution.

Gudmundson [62] a développé une méthode de prédiction du changement des fréquences de résonance due à la présence d'une fissure, d'une entaille ou tout autre changement géométrique

localisé. Sa méthode basée sur une technique de perturbation de premier ordre a montré, pour les trois cas suivants

- vibration d'une console fissurée ;
- vibration longitudinale d'une poutre fissurée ;
- vibration longitudinale d'une poutre comportant un trou ;

une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux de Wendtland [120] pour le premier cas, et avec les résultats des calculs éléments finis pour les deux derniers.

Avec l'avancée notable des capacités des ordinateurs, les méthodes numériques sont devenues le premier outil d'exploration des divers aspects liés à la modélisation des structures en présence de non-linéarités. Elles représentent, de nos jours, une bonne alternative au retour d'expérience et aux modèles expérimentaux dont une mise en place représentative des cas industriels est souvent délicate et coûteuse.

La plupart des chercheurs, cependant, sont d'accord sur l'utilisation de la mécanique de la rupture pour le calcul des coefficients de souplesses apportées par la région fissurée, que la fissure n'affecte que la région adjacente conformément au théorème de Saint Venant. Ensuite pour l'exploration par éléments finis du comportement vibratoire de structures fissurées, deux procédures sont proposées :

- la première consiste à construire une matrice de rigidité exclusivement pour la section fissurée modélisée par un ressort équivalent. Elle est obtenue par inversion de la matrice des coefficients de souplesses calculés via les principes de la mécanique de la rupture décrits précédemment. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle conduit, pour des fissures peu profondes, à des termes très élevés de la matrice de rigidité ce qui pourrait conduire à des problèmes numériques lors de la résolution du problème,
- la seconde, souvent utilisée par les chercheurs, consiste à construire un élément fini de poutre fissurée. Cet élément est, par la suite, assemblé avec le reste des éléments de la structure comme dans le cas classique. Cette méthode, en revanche, évite les incertitudes numériques lors du calcul de la matrice de rigidité.

Dans ce contexte, Sundermeyer et Weaver [110] ont étudié la réponse d'une poutre fissurée, simplement appuyée, modélisée par deux éléments poutre d'Euler-Bernoulli reliés par un ressort non-linéaire représentant la section fissurée. Saavedra et Cuitno [105], en se basant sur les travaux de Krawczuk [77], et Dimarogonas et Paipetis [45] pour le calcul des coefficients de souplesses, ont présenté la démarche de construction d'un élément fini de poutre fissurée qui peut être utilisé dans un code classique de lignes d'arbres. Ils ont ensuite examiné les réponses vibratoires d'une poutre libre-libre et d'un portique soumis à des excitations harmoniques. Les résultats obtenus coïncident avec les résultats expérimentaux. Hamidi [65, 64, 66] a présenté deux modèles analytiques, l'un basé sur l'approche de Rayleigh-Ritz et l'autre sur une formulation par éléments finis [104] pour étudier l'influence de fissures d'arbres tournant sur les paramètres modaux de la structure. Ces travaux ont confirmé le faible niveau de sensibilité des fréquences de résonance à la présence d'une fissure. Hamidi a conclu que ce paramètre seul ne peut être exploité pour détecter un affaiblissement de structure si on tient compte des erreurs possibles de mesure dans un processus de surveillance. En revanche, ces travaux ont montré que la variation du premier mode de vibration avait un maximum de sensibilité à l'endroit de la fissure et que le niveau de cette variation dépendait de l'importance

de la fissure. L'inconvénient de la stratégie de surveillance proposée dans [104] est qu'elle nécessite l'arrêt de la machine, ce que les chercheurs essaient d'éviter.

Zuo [126], et Zuo et Curnier [127] ont utilisé un modèle linéaire par morceaux pour décrire approximativement la vibration d'un arbre fissuré dans le but de développer une méthode de détection de fissures en ligne. Ils ont effectué l'étude d'un système à 1 ddl puis ils ont examiné le comportement d'un système à 2 ddl. En se basant sur la notion de mode normal de Rosenberg, ils ont défini les modes non-linéaires du système linéaire par morceaux. Ces derniers ont été mis en évidence numériquement, et dans certains cas simples, analytiquement. Leurs caractéristiques ont été énumérées et comparées à celles des modes linéaires. La propriété la plus intéressante est l'invariance des périodes des modes non-linéaires par rapport à l'amplitude de vibration. Cette propriété a permis une estimation analytique précise de telles quantités. Une bifurcation de doublement de période a été localisée aussi bien pour le modèle non gyroscopique que pour le modèle gyroscopique.

Bachschnid et al. [14, 11, 12, 15, 13] ont examiné les effets de la présence d'une fissure sur la réponse vibratoire d'un rotor ou d'un axe de pompe. Des modèles expérimentaux et numériques ont été proposés, les effets thermiques sur le mécanisme de respiration de la fissure ont été pris en compte dans [12]. Il a été rapporté que la distribution de température n'est pas influencée par la présence de la fissure contrairement à celles des contraintes et des déformations.

Bachschnid [11] a proposé la mise en oeuvre d'une procédure itérative de résolution de l'équation d'équilibre de la section fissurée soumise aux efforts de flexion et de traction-compression pour calculer ses moments quadratiques caractéristiques. Dans ce cadre [115], il faut définir la famille de champs de contraintes statiquement admissibles où rechercher la solution. D'autre part, on peut craindre que cette démarche conduise à des temps de calcul relativement élevés. Cette méthode traduit également le souci de décrire finement la réponse de l'élément de rotor fissuré en fonction de l'orientation des efforts qui lui sont appliqués.

Aujourd'hui, la plupart des travaux sur la vibration des rotors fissurés consistent à explorer plus profondément certains points particuliers tels que la phase d'accélération ou de décélération de l'arbre, le passage par la vitesse critique ou le couplage entre divers modes de vibrations. Ces travaux dont on peut citer par exemple ceux de Darpe et al. [32, 31, 33, 30], ceux de Sinou et Lees [108] ou ceux de Jun et Eun [74] où on trouve les résultats numériques et expérimentaux de leurs investigations sur certains points tels que cités ci-dessus, restent fidèles aux modèles de fissures développés dans les années 70 et 80 dans quelques articles fondateurs.

1.4 Présentation du modèle de fissure développé à EDF

L'étude bibliographique réalisée dans les sections précédentes de ce chapitre montre que les modèles proposés concernent des géométries simples de sections fissurées (souvent fissure unique à fond droit) et semblent peu adaptés à la diversité des situations rencontrées dans le monde industriel. Ces analyses, qui font appel à des démarches de modélisation complexes pour tenir

compte des propriétés non-linéaires des fissures, doivent également être très précises pour permettre l'identification et le calcul des paramètres caractérisant leur présence [115]. Dans ce cadre, la représentativité du modèle de fissure est un élément essentiel pour assurer la validité des résultats des calculs. Dans le même temps, il apparaît que la quasi totalité des modèles utilisés s'appuie sur les principes théoriques formalisés dans le courant des années 70 dans quelques articles fondateurs. Cette démarche de modélisation, qui fait aujourd'hui référence, n'en reste pas moins approchée, ce qui amène à quelques réserves quant à la qualité des résultats quantitatifs issus de son exploitation. Parallèlement, le progrès remarquable et continu de l'outil informatique permet la réalisation de performantes modélisations tridimensionnelles en mécanique statique non-linéaire. Ainsi, il est devenu possible d'envisager une identification de la loi de comportement d'une section de rotor fissurée qui s'affranchisse d'un certain nombre d'hypothèses et d'approximations faites jusqu'à présent sans dégrader les coûts des calculs de dynamique des rotors.

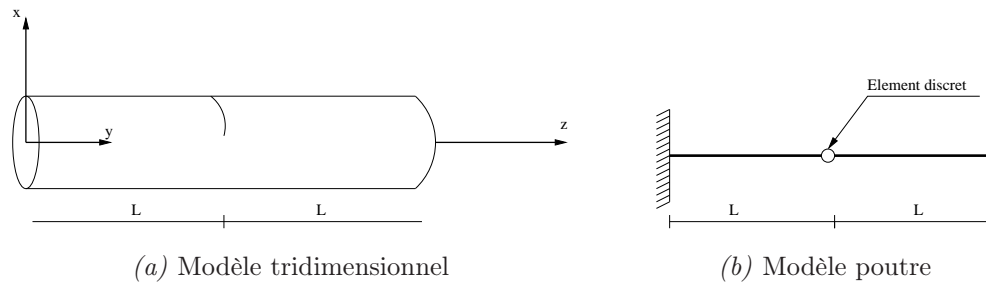


FIG. 1.5: *Modélisation de l'élément de poutre fissuré*

Andrieux et Varé [4, 5, 115, 114, 116] ont développé une démarche originale de calcul de la loi de comportement en flexion bi-axée d'une section de poutre fissurée. Ils ont cherché à développer une méthode qui puisse être applicable à toute géométrie de fissure transverse (incluant le cas de fissures multiples) pour laquelle une modélisation tridimensionnelle devient inévitable. La représentation de l'élément de poutre fissuré en 3D a permis une modélisation fine des champs de contraintes et de déformations à proximité de la fissure. En particulier, les calculs tridimensionnels réalisés pour l'identification de la loi d'évolution de la souplesse locale de la section fissurée en fonction de la direction du chargement (couple de moments de flexion) tiennent compte du contact unilatéral entre les lèvres en vis-à-vis. Ces calculs ont permis l'obtention d'une description très fine du mécanisme de respiration de la fissure.

Le modèle proposé, cf. figure 1.5, consiste à représenter l'élément de poutre fissuré par deux éléments de poutres saines reliés par un élément nodale (longueur nulle) représentant la fissure. Cet élément nodal est, en effet, un ressort non-linéaire dont la raideur varie en fonction du chargement. En effet, les retours d'expériences ont montré que les fissures sont très localisées, cf. figure 1.6, et leur étendue suivant l'axe de l'arbre est souvent faible devant la portée des rotors. Elles apparaissent au niveau des discontinuités géométriques : changement de diamètre, loges des ailettes ... Dans le cas des conduites, on en rencontre au niveau des coudes de circuits ou des points de soudure. L'idée de représenter une section fissurée par un noeud discret est, de ce fait, justifiée.

En exploitant les propriétés des fonctions énergies, Andrieux [4] a réduit le problème d'identification de la loi de comportement du noeud discret modélisant la fissure (un problème de minimisation sur \mathbb{R}^2 pour tenir compte de tous les couples de moments de flexion possibles) à un problème d'identification d'une fonction de souplesse notée s sur $[0, 2\pi]$. L'ancien modèle de fissure intégré dans le

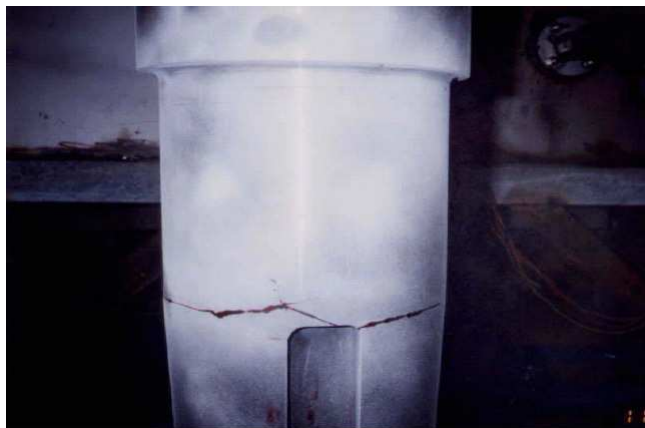


FIG. 1.6: *Exemple de fissures affectant les rotors*

code de lignes d'arbres (CADYAC) développé à EDF s'appuie sur des résultats semi-analytiques et est très limité en ce qui concerne la diversité des fissures prises en compte. Il ne tient compte du mécanisme de respiration de la fissure que d'une façon assez grossière et par l'introduction de fonction de fermeture plus ou moins arbitrairement choisie. Le nouveau modèle développé par Andrieux et Varé et qui sera exposé avec beaucoup plus de détails dans le second chapitre, a permis, en donnant un fondement théorique à la manière de représenter la section fissurée, d'enrichir l'ancien modèle de fissure dans le code CADYAC. Ce modèle de rotor fissuré a été validé expérimentalement par Audebert et Voinis [10] pour différents profils et profondeurs de fissures.

1.5 Conclusions

Depuis le début des années 80, un grand nombre de publications s'intéresse à la description de la réponse vibratoire des lignes d'arbres affectées de fissures. Il apparaît que la quasi totalité des modèles présentés s'appuie sur les principes théoriques formalisés au cours des années 70 dans quelques articles fondateurs. Ces modèles reposent sur deux principes fondamentaux :

- la représentation de la section fissurée par une flexibilité locale,
- la prise en compte d'un mécanisme de respiration de la fissure.

La section de rotor affectée de fissures est alors modélisée par une matrice de souplesses locales (6×6) calculées à partir de concepts de mécanique de la rupture [45]. Faute de formules analytiques pour la plupart des géométries de structures et de fissures rencontrées, les méthodes numériques sont exploitées pour l'identification des coefficients d'intensité des contraintes. Dès qu'on s'écarte du cas simple d'une fissure unique à fond droit, ces méthodes deviennent coûteuses en temps de

calcul et leur précision est dégradée. Ceci rend la généralisation de la démarche à toute géométrie de section fissurée complexe, voire impossible dans certains cas où la fissure n'est pas connexe.

Basée sur une formulation énergétique, la méthode originale présentée par Andrieux et Varé [5] assure une représentation précise de la loi d'évolution de la souplesse apportée par la fissure en fonction de l'orientation des efforts qui lui sont appliqués. Moyennant un investissement initial pour le calcul de la loi de comportement, l'exploitation du modèle est tout aussi performante, en terme de coûts de calcul, que les modélisations simplifiées les plus couramment utilisées jusqu'à présent. Dans le prochain chapitre, ce modèle est enrichi par la considération des effets du cisaillement. Quelques remarques sur la prise en compte de la torsion seront également données.

Chapitre 2

Poutre fissurée en flexion avec prise en compte des effets de cisaillement

Sommaire

2.1	Présentation	23
2.2	Rappel sur les poutres de Timoshenko	24
2.2.1	Champ de déplacement de Timoshenko	24
2.2.2	Tenseurs de déformations et de contraintes	24
2.2.3	Efforts intérieurs	25
2.2.4	Equations d'équilibre	27
2.3	Modèle de poutre fissurée	27
2.3.1	Description du modèle	27
2.3.2	Problème de Saint Venant	28
2.4	Formulation du problème d'élasticité avec contact unilatéral	30
2.4.1	Motivation	30
2.4.2	Conditions aux limites	31
2.4.3	Equations du problème	33
2.4.4	Remarques sur la réalisation des conditions aux limites avec le <i>Code_Aster</i> [©]	34
2.4.5	Propriétés de la fonction énergie	34
2.5	Equations d'équilibre de l'élément de poutre fissuré	36
2.6	Loi de comportement de la section de poutre fissurée	37
2.6.1	Souplesse apportée par la section fissurée	37

2.6.2	Expression de la loi de comportement	39
2.6.3	Identification de la rigidité de l'élément discret	39
2.7	Étude du problème "plan"	42
2.7.1	Ecriture discrétisée de la fonction souplesse	43
2.7.2	Application de la démarche à une fissure à fond droit de profondeur 50%	44
2.7.3	Validation du modèle	48
2.7.4	Conclusions	48
2.8	Étude de la flexion bi-axée avec prise en compte des effets de cisaillement	49
2.8.1	Ecriture de la fonction énergie	50
2.8.2	Prise en compte des effets de cisaillement	53
2.8.3	Loi de comportement de la section fissurée	55
2.8.4	Application de la démarche à une fissure à fond droit de profondeur 50%	57
2.8.5	Validation du modèle	58
2.9	Quelques remarques sur la prise en compte de la torsion	60
2.10	Conclusions	64

2.1 Présentation

La découverte de rotors fissurés sur les lignes d'arbres du parc CP0-CP1 a conduit le département AMA à développer un modèle permettant de considérer tout type de fissure dans le calcul du comportement vibratoire des machines tournantes au moyen du Code CADIAC. La loi de comportement associée à ce modèle établit une relation, apparaissant sous la forme d'un élément nodal de raideur non-linéaire, entre les discontinuités de rotations et le moment de flexion que connaît le rotor au niveau de cette section. Concernant les rotors BP (Basse Pression) des turbines du parc CP0-CP1, les fissures détectées à ce jour se développent environ à mi-portée du fût, zone où l'effort tranchant est négligeable et le moment de flexion maximal (principalement sous l'effet du poids propre du rotor). La loi de comportement est donc tout à fait appropriée pour traiter le problème posé. Néanmoins, le département AMA doit se doter des moyens de caractériser les vibrations causées par des fissures dans des configurations ou pour des matériels différents. Cela concerne, par exemple, le calcul de descripteurs de la fissuration appliqué à des machines verticales comme les pompes primaires. En effet, la stratégie de maintenance des arbres de ces pompes, dont certains sont affectés de fissurations, soit au niveau de l'épaule supérieur du palier pompe (arbre de type 93D), soit au niveau de la bague thermique (arbres 93D et 100D), nécessite d'établir leur signature vibratoire afin de confirmer et d'affiner les critères classiquement retenus pour le diagnostic de tels défauts.

Dans de tels cas, la proximité de la section potentiellement fissurée avec le point d'application de l'effort hydraulique s'exerçant sur la roue aspiratrice d'une part, et, d'autre part, le fait que le poids propre du rotor ne concourt pas à la flexion de l'arbre, conduisent à tenir compte de l'influence du cisaillement dans l'écriture de la loi de comportement de la section fissurée. De plus, les retours d'expérience internationaux sur les pompes de conceptions similaires montrent que, également dans l'étude de ces matériels, une grande diversité de faciès de fissures doit pouvoir être prise en compte.

Ce chapitre est consacré à la détermination de la loi de comportement en flexion d'une section de poutre fissurée avec prise en compte des effets de cisaillement. L'identification de la loi de comportement recherchée est basée sur des calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral sans frottement entre les lèvres de fissures. La modélisation tridimensionnelle permet une représentation fine des champs de contraintes et de déformations au voisinage de la section fissurée. Il s'agit, donc, d'identifier un modèle poutre à partir d'une modélisation tridimensionnelle. Partant d'un élément tridimensionnel comportant une section fissurée, la modélisation unidimensionnelle consiste en deux éléments poutre de Timoshenko représentant les parties saines, reliés par un élément nodal (ressort non-linéaire) représentant la section fissurée.

La première partie de ce chapitre est relative à l'étude du problème de flexion plane d'un élément de poutre fissuré. On commence alors par un rappel sur la théorie des poutres de Timoshenko. Ensuite, on présente la démarche d'identification de la loi de comportement non-linéaire reliant les efforts intérieurs et les sauts de déplacement et de rotation au niveau de la section fissurée. Enfin les résultats de l'application de la démarche à une section fissurée à fond droit sont présentés.

La seconde partie est consacrée à l'étude du problème de la flexion bi-axée d'une poutre fissurée

avec la prise en compte des effets du cisaillement. Les résultats de la première partie et les propriétés de l'énergie du problème permettent de réduire les calculs tridimensionnels nécessaires à l'identification de la loi de comportement non-linéaire recherchée. Un exemple de validation de la démarche est proposée à la fin.

2.2 Rappel sur les poutres de Timoshenko

Cette section est relative à la présentation de quelques relations qui caractérisent la théorie des poutres fléchissant dans un plan, en tenant compte de l'influence des déformations liées au cisaillement transverse. Ce modèle de poutre basé sur l'hypothèse des sections droites constitue ce que l'on appelle le modèle de poutre de Timoshenko [16]. Ce modèle :

- généralise les modèles plus classiques basés sur l'hypothèse de conservation des normales, modèles souvent associés aux noms de Bernoulli, Euler et Navier,
- constitue la version unidimensionnelle du modèle de plaques et coques associé aux noms de Reissner et Mindlin.

Deux hypothèses essentielles sont à rappeler :

- Les sections droites sont constantes ou "lentement variables" lorsqu'on se déplace sur la ligne moyenne de la poutre,
- Si on appelle d_t une dimension transversale de la section droite, on a en tout point de la poutre $d_t \ll R_c$ où R_c est le rayon de courbure.

Ces deux hypothèses permettent d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur faible à un tronçon de poutre droite.

2.2.1 Champ de déplacement de Timoshenko

Dans le repère direct $(oxyz)$, le champ de déplacement de Timoshenko utilisé en cinématique des poutres planes fléchissant dans un plan (ici (xz)) est donnée par

$$\mathbf{u}(z) = \begin{cases} u_x(z) \\ \theta_y(z) \\ u_z(z) - x\theta_y(z) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $u_z(z)$ et $u_x(z)$ désignent, respectivement, le déplacement horizontal (selon z), vertical (selon x) du centre de gravité de la section courante d'abscisse z dont $\theta_y(z)$ est la rotation autour de l'axe (oy) , cf. figure 2.1.

2.2.2 Tenseurs de déformations et de contraintes

On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire et isotrope, en petites déformations et petits déplacements. Le tenseur des déformations linéarisé, cf. figure 2.1, est obtenu par dérivation du

champ de déplacement (2.1) par rapport à z . Il s'écrit sous la forme

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{cases} 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} - \theta_y(z) = (u'_z(z) - \theta_y(z)) = \gamma_{zx} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z(z)}{\partial z} - x \frac{\partial \theta_y(z)}{\partial z} = (u'_z(z) - x\theta'_y(z)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent sur la configuration initiale. La loi de comportement du ma-

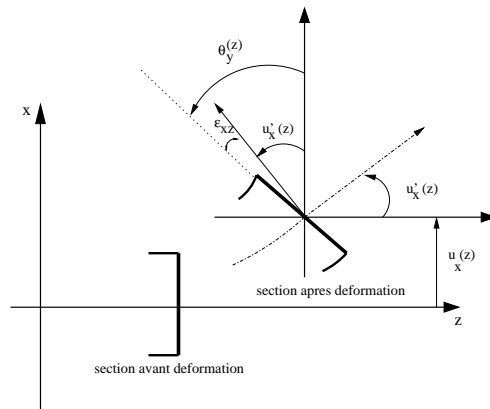


FIG. 2.1: Déformation d'une section de poutre de Timoshenko

tériau constituant la poutre est

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \text{tr}(\epsilon)\mathbb{I}_d \quad (2.4)$$

soit encore, en utilisant le module d'Young du matériau E et le coefficient de Poisson ν

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu}(\epsilon + \frac{\nu}{1-2\nu}\text{tr}(\epsilon)\mathbb{I}_d) \quad (2.5)$$

\mathbb{I}_d désigne l'opérateur identité.

On rappelle les relations entre les coefficients de Lamé (μ et λ) et les coefficients utilisés en élasticité (E et ν) :

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

2.2.3 Efforts intérieurs

On considère une poutre de longueur $2L$, de section circulaire d'aire S et de rayon R . Afin de simplifier l'écriture des équations des poutres, on choisit une structure encastree à son extrémité

d'abscisse $z = 0$. Cette même configuration (géométrie et conditions aux limites) sera adoptée, par la suite, pour l'identification de la loi de comportement d'un élément de poutre fissurée.

La poutre de la figure 2.2 est soumise à :

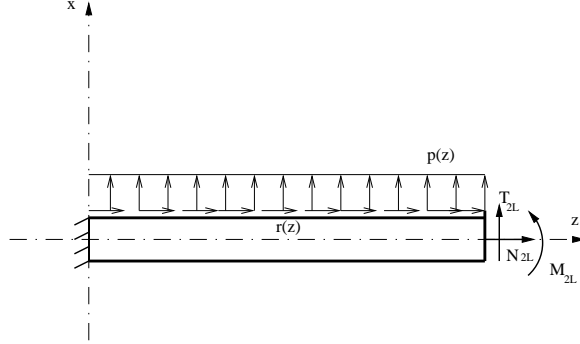


FIG. 2.2: Schéma d'une poutre de Timoshenko fléchissant dans son plan

- $r(z)$: densité linéique de charges horizontales,
- $p(z)$: densité linéique de charges verticales,

et au niveau de la section libre d'abscisse $z = 2L$ à :

- N_{2L} : force horizontale,
- T_{2L} : force verticale,
- M_{2L} : moment de flexion autour de (oy) .

On définit pour une section courante d'abscisse z :

- l'effort normal $N(z) = \int_S \sigma_{zz} dS$,
- l'effort tranchant $T(z) = k \int_S \sigma_{zx} dS$,
- le moment fléchissant $M(z) = - \int_S x \sigma_{zz} dS$

k étant le facteur de correction de cisaillement. Il permet de tenir compte du fait que le cisaillement est réparti de manière parabolique sur la section droite. C'est le rapport de l'énergie interne de cisaillement associée à la distribution théorique (exacte) de contraintes de cisaillement par celle associée au modèle de Timoshenko. Le facteur k vaut par exemple $\frac{5}{6}$ pour une section droite rectangulaire pleine et $\frac{1}{1,175}$ pour une section circulaire pleine [16].

Ainsi pour toute section de la poutre d'abscisse z , les efforts intérieurs sont donnés par

$$\begin{cases} N(z) = ESu'_z(z) \\ T(z) = \mu k S \gamma_{zx}(z) \\ M(z) = EI\theta'_y(z) \end{cases} \quad (2.6)$$

I étant le moment d'inertie quadratique par rapport à (oy) .

2.2.4 Equations d'équilibre

La densité d'énergie de déformation élastique est alors donnée par

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_{zz} \sigma_{zz} + k \epsilon_{zx} \sigma_{zx} = \frac{E}{2} (u'_z(z) - x \theta'_y(z))^2 + \frac{k\mu}{2} \gamma_{zx}^2(z) \quad (2.7)$$

En intégrant sur la section transversale, on obtient la densité linéique d'énergie de déformation élastique sous la forme

$$w_l = \int_S w dS = \frac{1}{2} \frac{N^2(z)}{ES} + \frac{1}{2} \frac{T^2(z)}{\mu k S} + \frac{1}{2} \frac{M^2(z)}{EI} \quad (2.8)$$

L'énergie potentielle totale de la structure est donnée par :

$$E = \int_0^{2L} w_l dz - \int_0^{2L} r(z) u_z(z) dz - \int_0^{2L} p(z) u_x(z) dz - M_{2L} \theta_y(2L) - T_{2L} u_x(2L) - N_{2L} u_z(2L) \quad (2.9)$$

D'après le théorème du minimum de l'énergie potentielle [107], on a

$$\delta E = 0, \forall (\delta u_x, \delta u_z, \delta \theta_y) \quad (2.10)$$

En écrivant l'équation (2.10) pour les trois cas suivants

- $(\delta u_z \neq 0, \delta u_x = 0, \theta_y = 0)$
- $(\delta u_z = 0, \delta u_x \neq 0, \theta_y = 0)$
- $(\delta u_z = 0, \delta u_x = 0, \theta_y \neq 0)$

on obtient les équations d'équilibre

$$\begin{cases} N'(z) + r(z) = 0 \\ T'(z) + p(z) = 0 \\ M'(z) + T(z) = 0 \end{cases} \quad \forall z \in [0, 2L[\quad (2.11)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} N(2L) = N_{2L} \\ T(2L) = N_{2L} \\ M(2L) = M_{2L} \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3 Modèle de poutre fissurée

2.3.1 Description du modèle

Notre objectif est de considérer les effets du cisaillement dans l'identification de la loi de comportement d'une section de poutre fissurée en flexion. On se limite dans cette section à deux paramètres de chargement : le problème est ramené à l'étude en flexion d'une poutre fissurée fléchissant dans son plan (ici (xz)) en considérant les effets de cisaillement. Il s'agit d'établir, à partir de calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure, une relation de comportement non-linéaire entre le torseur d'efforts appliqué (moment fléchissant et effort tranchant) et le champ de déplacements (discontinuités de déplacements) résultants, qui soit compatible

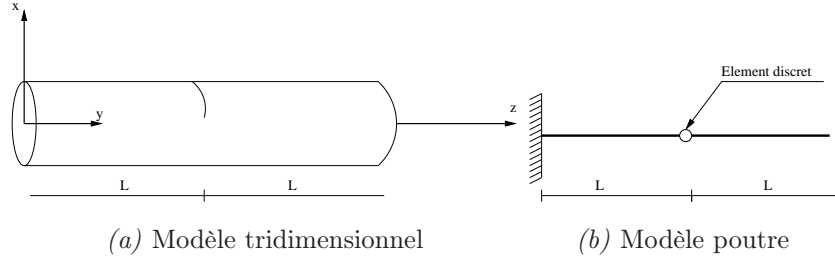


FIG. 2.3: Modélisation de l'élément de poutre fissuré

avec la théorie des poutres présentée dans la section précédente. La modélisation adoptée, cf. figure 2.3, s'appuie sur une représentation de la perte de rigidité due à la fissure par un élément discret de longueur nulle reliant deux poutres représentant les parties saines de la structure.

Pour la construction du modèle, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- le matériau est élastique, homogène et isotrope,
- les fissures sont de formes et en nombre quelconques,
- les conditions de contact unilatéral sans frottement s'appliquent sur les lèvres des fissures en vis-à-vis,
- le jeu initial entre lèvres des fissures est nul (ce qui distingue la fissure d'une entaille),
- finalement, le modèle a été développé en hypothèses de petites perturbations.

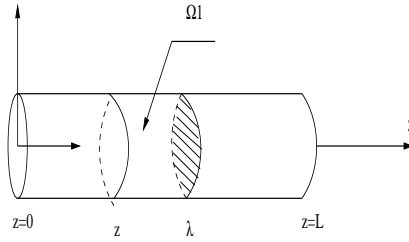
Il s'agit d'identifier un modèle poutre à partir d'une représentation tridimensionnelle. La question qui se pose à ce stade de l'étude est, pour un élément de section circulaire par exemple, " quel rapport $\frac{L}{D}$ (Longueur/Diamètre) doit-on considérer pour que l'énergie élastique apportée par la fissure (située au milieu) en soit indépendante " ? Cette question peut être posée autrement : " au-delà de quel rapport $\frac{L}{D}$, les effets de la présence de la fissure sur les champs solutions aux extrémités de l'élément fissuré deviennent-ils négligeables " ? Il s'agit d'examiner un problème de Saint Venant [107].

2.3.2 Problème de Saint Venant

Pour répondre à la question posée ci-dessus, on considère un cylindre de rayon R , de section S **connexe** et de longueur L . Sur la section définie par $z = 0$, notée $S(0)$, on impose des tractions surfaciques $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$. $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{n} désignent le tenseur des contraintes de Cauchy et la normale sortante à $S(0)$, respectivement. Sur les surfaces restantes du solide, le vecteur-contrainte est nul ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$). Dans ce qui suit, on rappelle le travail de Palamà [96] qui a démontré que les effets de ces perturbations locales décroissent très vite dès qu'on s'éloigne de $S(0)$.

On appelle

$$W(z) = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_z^L \int_{S(\lambda)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dS d\lambda \quad (2.13)$$



l'énergie élastique du solide compris entre l'abscisse z et L , appelé Ω_1 . Ainsi,

$$W'(z) = - \int_{S(z)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dS \quad (2.14)$$

Soient u un champ de déplacement cinématiquement admissible solution du problème élastique et \mathbf{H} l'ensemble défini par :

$$\mathbf{H} = \{ \mathbf{v}(M_1) = \mathbf{u}(M_2) + \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \wedge \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \}$$

\mathbf{v}_0 et \mathbf{w}_0 sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 et M_1 et M_2 deux points du solide.

Les champs \mathbf{u} et \mathbf{v} ne diffèrent que par un champ de déplacement de corps rigide, donc

$$\forall (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0), \int_{S(z)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(z)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS$$

et par suite

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dV = \int_{S(z)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(z)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.15)$$

L'application de l'inégalité de Schwartz conduit à

$$\int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV \leq \left\{ \int_{S(z)} |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{S(z)} \mathbf{v}^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

Soit Λ le tenseur des modules élastiques, $\boldsymbol{\sigma} = \Lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, de valeurs propres minimale et maximale, respectivement μ_m et μ_M .

$$|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|^2 \leq |\boldsymbol{\sigma}|^2 = |\boldsymbol{\sigma}| \cdot |\boldsymbol{\sigma}| \leq \mu_M \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\mu_M^2}{\mu_m} = \frac{\mu_M^2}{\mu_m} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mu^* \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.17)$$

et par suite

$$\int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV \leq \{ \mu^* \int_{S(z)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dS \}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{S(z)} \mathbf{v}^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

On pose

$$q(z) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}} \frac{\int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{v} \cdot \Lambda \cdot \nabla \mathbf{v} dV}{\int_{S(z)} \mathbf{v}^2 dS}, \text{ (quotient de Rayleigh)}$$

l'équation (2.18) devient

$$\left\{ \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dv \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}(z)} \{ \mu^* \int_{S(z)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dS \}^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

ou encore

$$\left\{ \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dv \right\} \leq \frac{\mu^*}{q(z)} \left\{ \int_{S(z)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dS \right\} \quad (2.20)$$

Finalement, en tenant compte de (2.14), on écrit

$$W'(z) = - \int_{S(z)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dS \leq - \frac{q(z)}{\mu^*} \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dv = - \frac{q(z)}{\mu^*} W(z) \quad (2.21)$$

pour obtenir

$$W(\lambda) \leq W(0) e^{-h(\lambda)} \quad (2.22)$$

$h(\lambda)$ est une fonction croissante de λ définie par :

$$h(\lambda) = \frac{\mu_m}{\mu_M^2} \int_0^\lambda q(z) dz$$

$h(\lambda) > 0$ puisque $q(z) > 0$.

L'équation (2.22) montre que les effets des perturbations en $S(0)$ sur la solution en $S(\lambda)$ décroît rapidement (en exponentielle) avec λ .

En pratique, on adopte une longueur totale de l'élément fissuré $2L = 4D$ et on a pu vérifier qu'elle est suffisamment grande pour supposer la section fissurée "loin" des sections extrêmes (voir la section 2.8.1 du second chapitre).

2.4 Formulation du problème d'élasticité avec contact unilatéral

2.4.1 Motivation

Afin de rendre la démarche d'identification de la loi de comportement recherchée envisageable, il faut réduire le nombre de calculs tridimensionnels nécessaires à cette identification en exploitant les propriétés de la fonction énergie élastique du problème. Ces propriétés peuvent être déduites de l'analyse du problème d'élasticité avec contact unilatéral formulé en énergie et ceci indépendamment de la géométrie de la fissure.

On considère un élément tridimensionnel de poutre droite à plan moyen, de longueur $2L$, d'axe (oz) (ligne des centres d'inertie G des sections), "encastré au sens de la théorie des poutres" à son extrémité d'abscisse $z = 0$. L'élément est soumis à son extrémité libre (d'abscisse $z = 2L$) au torseur ($T_x(2L) = T_{2L}, M_y(2L) = M_{2L}$) à l'exclusion de tout autre effort : on parlera de problème à effort imposé. Le tronçon de poutre comporte, en $z = L$, une section fissurée. Les fissures, notées Γ , sont transverses. Les efforts sont appliqués via des répartitions de contraintes normale et tangentielle. Les sections extrêmes sont assujetties à rester planes en moyenne conformément à la solution tridimensionnelle de Saint Venant [4]. La longueur L est supposée suffisamment grande pour négliger les effets de la présence de la fissure sur les champs solutions aux extrémités de l'élément.

2.4.2 Conditions aux limites

La surface latérale de l'élément, de normale sortante \mathbf{n} , n'est soumise à aucun chargement extérieur, on a simplement $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Il reste à préciser les conditions aux limites sur trois surfaces : les sections extrêmes ($z = 0$ et $z = 2L$) et la surface des fissures situées en $z = L$.

2.4.2.1. Conditions aux limites sur les fissures

Les fissures sont constituées de deux surfaces en vis-à-vis. On note par Γ^+ celle de normale sortante $-\mathbf{e}_z$ et par Γ^- celle en vis-à-vis (donc de normale sortante \mathbf{e}_z). Le champ de déplacement peut présenter un saut à la traversée de la fissure, il est noté

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}(x, y, L^+) - \mathbf{u}(x, y, L^-)$$

Les conditions de contact unilatéral sans frottement s'écrivent ainsi

- $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$: absence de cisaillement sur les lèvres,
- $[\mathbf{u}] \cdot (-\mathbf{e}_z) \leq 0$: pas d'interpénétration des lèvres,
- $\sigma_{zz} \leq 0$: la contrainte normale ne peut être qu'une compression,
- $[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{e}_z \sigma_{zz} = 0$: soit la fissure est ouverte et la contrainte normale est nulle, soit les lèvres sont en contact et la contrainte normale est de compression.

2.4.2.2. Conditions aux limites sur les sections extrêmes : rappel sur les conditions de raccord 3D-poutre

A l'extrémité d'une structure tridimensionnelle élancée, il est souvent utile d'imposer soit un chargement de type "poutre", soit des conditions aux limites compatibles avec la cinématique des poutres. Lorsque l'on désire analyser finement un tronçon d'une structure élancée, cf. figure 2.4, on peut, afin de réduire la taille du maillage à manipuler, vouloir représenter les parties "loin" du tronçon à analyser par des poutres. Le raccord 3D-Poutre doit donc satisfaire les exigences suivantes [102] :

- pouvoir transmettre les efforts de poutre (torseur) au solide maillé en milieu continu 3D,
- ne pas engendrer de contraintes "parasites",
- ne pas favoriser les conditions cinématiques ou les conditions statiques de raccord l'une par rapport à l'autre. Il doit être équivalent de ramener un torseur d'effort ou de déplacement aux limites du domaine 3D,
- admettre des comportements quelconques de part et d'autre du raccord et permettre également une analyse dynamique.

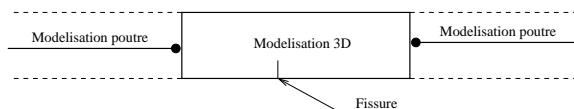


FIG. 2.4: Raccord 3D-poutre

Sur une face extrême du solide 3D, les grandeurs mécaniques qui peuvent être imposées via les conditions aux limites sont : le champ de déplacement \mathbf{u} et le champ de vecteur contrainte sur cette section $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est la normale sortante au solide (constante sur la section). Le long de cette partie du travail, la démarche proposée par Andrieux [4] sera suivie pour l'identification de la loi de comportement d'une poutre fissurée en flexion avec contact unilatéral.

On décompose \mathbf{u} en une partie "poutre" et une partie "complémentaire" qui lui est orthogonale. Ainsi, "imposer un torseur" au solide 3D revient à imposer que la partie "poutre" soit égale à la valeur imposée. Pour éviter l'introduction de contraintes parasites, la partie complémentaire de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ sera laissée libre : la section est libre de se gauchir.

Pour le champ \mathbf{u} , on a la définition suivante de la partie poutre \mathbf{u}^p [4] :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^c \text{ avec } \mathbf{u}^p = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{op} \quad (2.23)$$

Les vecteurs translation \mathbf{U} et rotation $\boldsymbol{\Omega}$ sont donnés par :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{u} dS \text{ et } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}_n^{-1} \left(\int_S \mathbf{op} \wedge \mathbf{u} dS \right)$$

p est le point courant de la section S et \mathbf{I}_n l'opérateur d'inertie géométrique (on suppose que l'origine des coordonnées est prise au centre d'inertie géométrique G de la section et que les axes coïncident avec les axes principaux d'inertie).

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y + I_x \end{pmatrix}$$

où $I_x = I_y = I$.

Pour le champ $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, la partie poutre $\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \mathbf{n}$ et la partie complémentaire $\boldsymbol{\sigma}^c \cdot \mathbf{n}$, vérifient

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^p \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^c \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{S} \mathbf{R} + \mathbf{I}_n^{-1} (\mathbf{M} \wedge \mathbf{op})$ et la résultante \mathbf{R} et le moment \mathbf{M} sont donnés par

$$\mathbf{R} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \int_S \mathbf{Gp} \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS$$

Dans la suite, on notera $\mathbf{U}_z(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{u})$, $\mathbf{R}_z(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$ et $\mathbf{M}_z(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$ les opérateurs linéaires permettant de définir translation, rotation, résultante et moment, au niveau de la section d'abscisse z , à partir des champs \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ et déterminés par les formulations précédentes.

La partie complémentaire à la partie poutre des champs est définie par orthogonalité, on a ainsi :

- l'unicité de la décomposition, par unicité de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie,
- la propriété d'orthogonalité entre les parties "poutre" et "complémentaire" de tout champ de déplacement et de vecteur contrainte, qui nous sera utile par la suite :

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS &= \int_S \boldsymbol{\sigma}^p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^p dS + \int_S \boldsymbol{\sigma}^c \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^c dS \\ &= \mathbf{R}_z(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_z(\mathbf{u}) + \mathbf{M}_z(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{u}) + \int_S \boldsymbol{\sigma}^c \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^c dS \quad (2.25) \end{aligned}$$

2.4.3 Equations du problème

On peut maintenant formuler de façon précise le problème de poutre fissurée avec contact unilatéral sans frottement sur les lèvres de fissures. Les équations du problème sont :

- sur le volume V occupé par le solide et en l'absence de forces volumiques

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

avec $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\epsilon}$, et $\boldsymbol{\Lambda}$ le tenseur des modules élastiques,

- sur la surface latérale du solide (de normale sortante \mathbf{n} égale à la radiale),

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

- sur la section d'abscisse $z = 2L$, le torseur imposé est

$$\mathbf{R}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) = T_{2L} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{M}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) = M_{2L} \mathbf{e}_y \quad (2.28)$$

La partie complémentaire du champ de vecteur contrainte est nulle $\boldsymbol{\sigma}^c \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$

- sur la section extrême d'abscisse $z = 0$, toute la partie "poutre" du champ de déplacement est bloquée :

$$\mathbf{U}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

La partie complémentaire du champ de déplacement est nulle $\mathbf{u}^c = \mathbf{0}$

- et finalement, sur Γ

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad [\mathbf{u}] \cdot (-\mathbf{e}_z) \leq 0 \quad (2.30)$$

$$\sigma_{zz} \leq 0, \quad [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{e}_z \cdot \sigma_{zz} = 0 \quad (2.31)$$

Commençons par introduire quelques définitions utiles pour la formulation énergétique du problème. Soient :

- V_a , l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles :

$$V_a = \{\mathbf{v} \in H^1(V \setminus \Gamma) / \mathbf{U}_0(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

- K_a , l'ensemble (cone convexe) des champs de V_a admissibles vis-à-vis de la condition de non interpénétration des lèvres des fissures :

$$K_a = \{\mathbf{v} \in V_a / [\mathbf{v}] \cdot (-\mathbf{e}_z) \leq 0\}$$

- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la forme bilinéaire associée à l'énergie de déformation élastique du solide et définie par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{V-\Gamma} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dV \quad (2.32)$$

- et pour $\mathbf{F} = (T_{2L}, M_{2L})$ un torseur d'effort donné, $l(\mathbf{F}, \mathbf{v})$ la forme linéaire associée au travail du champ de déplacement \mathbf{v} dans le chargement \mathbf{F} sur le bord du solide :

$$l(\mathbf{F}, \mathbf{v}) = T_{2L} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{U}_{2L}(\mathbf{v}) + M_{2L} \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\Omega}_{2L}(\mathbf{v})$$

La solution du problème défini par les équations (2.26)-(2.31) existe et est unique. La littérature est riche de travaux sur l'existence, l'unicité et la régularité des problèmes de solides élastiques en contact unilatéral sans frottement. On peut consulter Nguyen [91], Duvaut et Lions [48], Kikuchi [75] pour divers aspects mathématiques du problème.

2.4.4 Remarques sur la réalisation des conditions aux limites avec le *Code_Aster*[©]

Les conditions aux limites sur les sections extrêmes telles que décrites ci-dessus sont les seules permettant l'obtention des solutions analytiques classiques de la théorie des poutres lorsque le tronçon n'est pas fissuré. Leur application, lors d'un calcul de la réponse du tronçon fissuré par une approche numérique, se réalise de façon simple dans le *Code_Aster*[©] ¹ via le couplage des sections extrêmes avec un élément de poutre à six degrés de liberté : les conditions sont formulées directement en terme des torseurs d'effort ou de déplacement rigide de section sur l'élément, et la liaison entre la poutre et le solide 3D est exprimée exactement à l'aide des expressions ci-dessus [4, 102].

2.4.5 Propriétés de la fonction énergie

Afin de pouvoir écrire les équations d'équilibre d'un élément de poutre fissuré, certaines propriétés des fonctions énergies du problème doivent être établies. Ces propriétés vont, par la suite, permettre un choix pertinent de la forme de l'énergie apportée par la fissure et, ainsi, réduire remarquablement les calculs tridimensionnels nécessaires à sa détermination. On désigne par :

- W l'énergie de déformation élastique du problème,
- W^* l'énergie élastique complémentaire,
- et par E_p l'énergie potentielle totale du solide.

On donne ici les propriétés essentielles de la fonction W^* qui vont nous servir par la suite pour l'identification du modèle de poutre fissurée à partir de calculs tridimensionnels.

Propriété 1 *Le champ de déplacement \mathbf{u} solution du problème à effort imposé minimise la fonctionnelle énergie potentielle totale du solide définie par :*

$$E_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{F}, \mathbf{v})$$

De plus, on a

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq l(\mathbf{F}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in K_a$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{F}, \mathbf{u})$$

Cette propriété est une propriété générale des problèmes d'élasticité avec contact unilatéral.

Propriété 2 *La valeur de l'énergie élastique à l'équilibre sous le chargement \mathbf{F} est égale à l'opposé de la valeur minimale de l'énergie potentielle totale :*

$$W^*(T_{2L}, M_{2L}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

¹Code d'éléments finis thermo-mécanique d'EDF

On déduit immédiatement de cette dernière propriété une "formule de Clapeyron" étendant au cas unilatéral la formule connue pour les problèmes linéaires et qui servira en pratique à calculer la valeur de l'énergie à partir de calculs aux éléments finis :

$$W^*(T_{2L}, M_{2L}) = \frac{1}{2}(T_{2L}\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{U}_{2L}(\mathbf{u}) + M_{2L}\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{\Omega}_{2L}(\mathbf{u}))$$

Propriété 3 La fonction W^* est *strictement convexe* par rapport à ses arguments.

Propriété 4 La fonction W^* est *positivement homogène de degré 2* :

$$\forall \lambda \geq 0 \quad W^*(\lambda T_{2L}, \lambda M_{2L}) = \lambda^2 W^*(T_{2L}, M_{2L}) \quad (2.33)$$

Des propriétés similaires peuvent être établies pour l'énergie du problème à déplacements imposés. Les équations à résoudre restent les mêmes sauf (2.28) qui deviennent

$$\mathbf{U}_{2L}(\mathbf{u}) = u_{2L}\mathbf{e}_x, \mathbf{\Omega}_{2L}(\mathbf{u}) = \theta_{2L}\mathbf{e}_y \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^c \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

Soient

- V_a^d l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles

$$V_a^d = \{\mathbf{v} \in H^1(V \setminus \Gamma) / \mathbf{U}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{\Omega}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \mathbf{U}_{2L}(\mathbf{v}) = u_{2L}\mathbf{e}_x \text{ et } \mathbf{\Omega}_{2L}(\mathbf{v}) = \theta_{2L}\mathbf{e}_y\}$$

- K_a^d , l'ensemble (cone convexe) des champs de V_a^d admissibles vis-à-vis de la condition de non interpénétration des lèvres des fissures :

$$K_a^d = \{\mathbf{v} \in V_a^d / [\mathbf{v}] \cdot (-\mathbf{e}_z) \leq 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

- et \mathbf{u} le champ de déplacement solution du problème à déplacements imposés.

Propriété 5 \mathbf{u} minimise, sur l'ensemble convexe K_a^d , l'énergie potentielle du solide donnée par

$$E_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

Propriété 6 La valeur de l'énergie élastique à l'équilibre à déplacement imposé est égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle totale

$$W(u_{2L}, \theta_{2L}) = \frac{1}{2} \int_{V-\Gamma} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dV$$

Là également on peut établir "une formule de Clapeyron" qui servira en pratique à calculer la valeur de l'énergie à partir d'un calcul aux éléments finis :

$$W(u_{2L}, \theta_{2L}) = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) \cdot u_{2L}\mathbf{e}_x + \mathbf{M}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) \cdot \theta_{2L}\mathbf{e}_y)$$

Propriété 7 La fonction W est strictement convexe par rapport à ses arguments.

Propriété 8 La fonction W est positivement homogène de degré 2 :

$$\forall \lambda \geq 0, W(\lambda u_{2L}, \lambda \theta_{2L}) = \lambda^2 W(u_{2L}, \theta_{2L})$$

2.5 Equations d'équilibre de l'élément de poutre fissuré

L'élément de poutre fissuré de la figure 2.3 est soumis, au niveau de son extrémité libre ($z = 2L$), au torseur de chargement ($T_x = T_{2L}$, $M_y = M_{2L}$).

Soit E_p , son énergie potentielle totale donnée par

$$\begin{aligned} E_p &= \int_0^L \left[\frac{EI\theta_y'(z)^2}{2} + \frac{\mu k S(u_x'(z) - \theta_y(z))^2}{2} \right] dz \\ &+ \int_L^{2L} \left[\frac{EI\theta_y'(z)^2}{2} + \frac{\mu k S(u_x'(z) - \theta_y(z))^2}{2} \right] dz \\ &+ w([u_x], [\theta_y]) - M_{2L}\theta_y(2L) - T_{2L}u_x(2L) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les deux premiers termes à droite sont les énergies de déformations élastiques apportées par les deux parties (poutres) saines de la structure. $w([u_x], [\theta_y])$ désigne l'énergie apportée par le noeud discret modélisant la section fissurée.

Le principe du minimum de l'énergie potentielle illustré par la propriété 1, s'écrit

$$\delta E_p = 0, \forall (\delta u_x, \delta u_z, \delta \theta_y) \quad (2.36)$$

On considère les deux cas suivants :

- **cas 1** : $\delta u_x \neq 0, \delta u_z = 0$ et $\delta \theta_y = 0$.

Ce cas conduit à

$$\begin{aligned} \delta E_p = 0 &= \left[\mu k S(u_x'(z) - \theta_y(z)) \delta u_x \right]_0^L + \left[\mu k S(u_x'(z) - \theta_y(z)) \delta u_x \right]_L^{2L} \\ &- \int_0^L \mu k S(u_x''(z) - \theta_y'(z)) \delta u_x dz - \int_L^{2L} \mu k S(u_x''(z) - \theta_y'(z)) \delta u_x dz \\ &+ w_{,[u_x]}([u_x], [\theta_y]) - T_{2L} \delta u_x(2L) \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \delta E_p = 0 &= \left[T_x(z) \delta u_x \right]_0^L + \left[T_x(z) \delta u_x \right]_L^{2L} \\ &- \int_0^L T_x'(z) \delta u_x dz - \int_L^{2L} T_x'(z) \delta u_x dz \\ &+ w_{,[u_x]}([u_x], [\theta_y]) - T_{2L} \delta u_x(2L) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\text{avec } w_{,[u_x]}([u_x], [\theta_y]) = \frac{\partial w([u_x], [\theta_y])}{\partial [u_x]}.$$

En prenant $\delta u_x(0) = 0$, ce qui est en accord avec les conditions réelles (encastrement en $z = 0$),

on obtient

$$\begin{cases} T'_x(z) = 0 & \forall z \in]0, L[\cup]L, 2L[\\ T_x(L^+) = T_x(L^-) = w_{,[u_x],[\theta_y]}([u_x], [\theta_y]) & \text{pour } z = L \\ T_x(2L) = T_{2L} & \text{pour } z = 2L \end{cases} \quad (2.39)$$

- **cas 2** : $\delta u_x = 0$, $\delta u_z = 0$ et $\delta \theta_y \neq 0$.

Cette configuration conduit à

$$\begin{aligned} \delta E_p = 0 &= \left[EI\theta'_y(z)\delta\theta_y \right]_0^L + \left[EI\theta'_y(z)\delta\theta_y \right]_L^{2L} \\ &- \int_0^L EI\theta''_y(z)\delta\theta_y dz - \int_L^{2L} EI\theta''_y(z)\delta\theta_y dz \\ &+ \int_0^L \mu k S(u'_x(z) - \theta_y(z))\delta\theta_y dz + \int_L^{2L} \mu k S(u'_x(z) - \theta_y(z))\delta\theta_y dz \\ &+ w_{,[\theta_y]}([u_x], [\theta_y]) - M_{2L}\delta\theta_y(2L) \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec $w_{,[\theta_y]}([u_x], [\theta_y]) = \frac{\partial w([u_x], [\theta_y])}{\partial [\theta_y]}$.

En considérant, en particulier, la variation $\delta\theta_y(0) = 0$, ce qui est en accord avec la condition d'encastrement en $z = 0$, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} M'_y(z) + T_x(z) = 0 & \forall z \in]0, L[\cup]L, 2L[\\ M_y(L^+) = M_y(L^-) = w_{,[\theta_y]}([u_x], [\theta_y]) & \text{pour } z = L \\ M_y(2L) = M_{2L} & \text{pour } z = 2L \end{cases} \quad (2.41)$$

En conclusion, pour l'élément de poutre comportant, en $z = L$, une section fissurée, encasté en son extrémité $z = 0$ et soumis à l'autre au torseur de chargement ($T_x = T_{2L}$, $M_y = M_{2L}$), les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} T'_x(z) = 0 \\ M'_y(z) + T_x(z) = 0 \end{cases} \quad \forall z \in]0, L[\cup]L, 2L[\quad (2.42)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} T_x(2L) = T_{2L} \\ M_y(2L) = M_{2L} \end{cases} \quad \text{pour } z = 2L \quad (2.43)$$

quant au niveau de la section fissurée ($z = L$), la continuité des efforts intérieurs se traduit par

$$\begin{cases} T_x(L^+) = T_x(L^-) = w_{,[u_x]}([u_x], [\theta_y]) = T_L \\ M_y(L^+) = M_y(L^-) = w_{,[\theta_y]}([u_x], [\theta_y]) = M_L \end{cases} \quad (2.44)$$

2.6 Loi de comportement de la section de poutre fissurée

2.6.1 Souplesse apportée par la section fissurée

La fonction $W^*(T_{2L}, M_{2L})$ est strictement convexe et positivement homogène de degré 2. Ces propriétés permettent d'exprimer la fonction énergie en distinguant l'apport de la section fissurée,

w^* , de celui des éléments de poutre sains de longueur L , W_s^* .

Soit

$$W^*(T_{2L}, M_{2L}) = W_s^*(T_{2L}, M_{2L}) + w^*(T_{2L}, M_{2L}) \quad (2.45)$$

avec

$$W_s^*(T_{2L}, M_{2L}) = \int_0^{2L} \left(\frac{M_y^2(z)}{2EI} + \frac{T_x^2(z)}{2\mu kS} \right) dz \quad (2.46)$$

Les équations d'équilibre de l'élément fissuré conduisent à

$$\begin{cases} T_x(z) = T_{2L} \\ M_y(z) = M_{2L} + zT_{2L} \end{cases} \quad (2.47)$$

W_s^* est exprimée, en fonction des efforts résultants au niveau de la section fissurée M_L et T_L , par

$$W_s^*(T_L, M_L) = L \left(\left(\frac{M_L}{M_0} \right)^2 + \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^2 \right) \quad (2.48)$$

En écrivant W^* sous la forme

$$W^*(T_L, M_L) = L \left(\left(\frac{M_L}{M_0} \right)^2 + \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^2 \right) (1 + s(\Phi)) \quad (2.49)$$

$$\text{avec } M_0 = \sqrt{EI}, T_0 = \sqrt{\frac{3\mu kSEI}{3EI + L^2\mu kS}} \text{ et } \Phi = \text{atan} \left(\frac{\left(\frac{T_L}{T_0} \right)}{\left(\frac{M_L}{M_0} \right)} \right) \quad (2.50)$$

on distingue les souplesses apportées par les éléments sains de celle apportée par la section fissurée. Ainsi, le calcul de W^* sur \mathbb{R}^2 se réduit à l'identification de la fonction $s(\Phi)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

La fonction souplesse n'est cependant pas directement exploitable par les codes de lignes d'arbres développés au sein du département AMA. Afin d'établir une loi de comportement de la section fissurée de la forme

$$\begin{Bmatrix} M_L \\ T_L \end{Bmatrix} = f \left(\begin{Bmatrix} [\theta_y] \\ [u_x] \end{Bmatrix} \right) \quad (2.51)$$

c'est la rigidité apportée par la fissure qui doit être identifiée. Ceci nous conduit à introduire une propriété de l'énergie de déformation apportée par l'élément discret modélisant la fissure, $w([u_x], [\theta_y])$, pour une discontinuité de rotation $[\theta_y]$ et une discontinuité de déplacement vertical $[u_x]$.

La fonction w est **convexe et positivement homogène de degré 2** :

$$\forall \lambda \geq 0 \quad w(\lambda[u_x], \lambda[\theta_y]) = \lambda^2 w([u_x], [\theta_y]) \quad (2.52)$$

Cette propriété déduite des propriétés de w permet d'écrire l'énergie de déformation de l'élément discret sous la forme

$$w([u_x], [\theta_y]) = \frac{1}{4L} \left(\left(\frac{[u_x]}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{[\theta_y]}{\theta_0} \right)^2 \right) k(\varphi) \quad (2.53)$$

où $\theta_0 = \frac{1}{M_0}$, $u_0 = \frac{1}{T_0}$ et $\varphi = \text{atan} \left(\frac{\frac{[u_x]}{u_0}}{\frac{[\theta_y]}{\theta_0}} \right)$.

$k(\varphi)$ est la fonction rigidité de l'élément nodal à identifier.

2.6.2 Expression de la loi de comportement

La relation de comportement non-linéaire reliant, au niveau de la section fissurée, les efforts intérieurs aux discontinuités de rotation et de déplacement, est obtenue par dérivation de la fonction énergie. Elle s'obtient en écrivant

$$\begin{cases} M_L = \frac{\partial w([u_x], [\theta_y])}{\partial [\theta_y]} = \frac{1}{4L} \left(\frac{2}{\theta_0^2} k(\varphi) [\theta_y] + \left(\left(\frac{[u_x]}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{[\theta_y]}{\theta_0} \right)^2 \right) \frac{\partial k(\varphi)}{\partial [\theta_y]} \right) \\ T_L = \frac{\partial w^d([u_x], [\theta_y])}{\partial [u_x]} = \frac{1}{4L} \left(\frac{2}{u_0^2} k(\varphi) [u_x] + \left(\left(\frac{[u_x]}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{[\theta_y]}{\theta_0} \right)^2 \right) \frac{\partial k(\varphi)}{\partial [u_x]} \right) \end{cases} \quad (2.54)$$

or

$$\begin{cases} \frac{\partial k(\varphi)}{\partial [u_x]} = \frac{1}{u_0} \frac{\frac{[\theta_y]}{\theta_0}}{\left(\left(\frac{[u_x]}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{[\theta_y]}{\theta_0} \right)^2 \right)} k'(\varphi) \\ \frac{\partial k(\varphi)}{\partial [\theta_y]} = -\frac{1}{\theta_0} \frac{\frac{[u_x]}{u_0}}{\left(\left(\frac{[u_x]}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{[\theta_y]}{\theta_0} \right)^2 \right)} k'(\varphi) \end{cases}$$

ce qui conduit finalement à la loi de comportement non-linéaire recherchée qui s'écrit

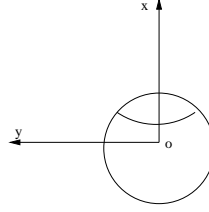
$$\begin{Bmatrix} M_L \\ T_L \end{Bmatrix} = \frac{1}{2L} \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_0^2} k(\varphi) & -\frac{1}{2} \frac{1}{\theta_0 u_0} k'(\varphi) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\theta_0 u_0} k'(\varphi) & \frac{1}{u_0^2} k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} [\theta_y] \\ [u_x] \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

2.6.3 Identification de la rigidité de l'élément discret

La rigidité de l'élément discret est une fonction permettant de déterminer le couple (M_L, T_L) associé à un couple de discontinuités $([\theta_y], [u_x])$. La résolution de ce problème est beaucoup moins immédiate que celle de l'identification de la fonction souplesse. En effet, alors qu'il est loisible d'imposer tous les couples (M_{2L}, T_{2L}) , tous les couples de discontinuités $([\theta_y], [u_x])$ ne sont pas toujours possibles. Cette contrainte est due à la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure qui impose un signe donné à la discontinuité normale du déplacement ($[u_z] \geq 0$ dans notre cas, cf. figure 2.3). On voit immédiatement que cette condition limite les valeurs possibles du couple de discontinuités $([\theta_y], [u_x])$. Supposons que la fissure (unique ou multiple) soit située dans une même demi-section disons $x > 0$, cf. figure 2.5. On voit alors que la condition sur $[u_z]$ implique que la discontinuité de rotation autour de l'axe (oy) soit toujours négative :

$$[u_z] \geq 0 \implies [\theta_y] \leq 0$$

La physique du problème impose d'avoir des couples $([\theta_y], [u_x])$ tels que $[\theta_y]$ soit négative ce qui exclut tout un demi plan du plan $([\theta_y], [u_x])$. Si on peut trouver plusieurs demi-sections conte-

FIG. 2.5: Section fissurée, fissures situées en $x > 0$

nant la zone fissurée ce qui est le cas pour des fissures de petite taille, on aura des contraintes supplémentaires qui limiteront les domaines des discontinuités possibles.

Revenons maintenant au problème de détermination de la fonction rigidité de l'élément discret représentant la section fissurée. On se propose d'utiliser une approche énergétique qui va assurer que la rigidité ainsi déterminée est bien la fonction réciproque de la fonction souplesse obtenue au paragraphe précédent. Rappelons une propriété très intéressante des fonctions convexes [4]

Propriété 9 Si f est une fonction convexe différentiable de \mathbb{R}^n , alors on a :

$$\begin{aligned} y_0 = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} &\iff x_0 = \frac{\partial f^*(y_0)}{\partial y} \\ x_0 y_0 &= f(x_0) + f^*(y_0) \end{aligned} \quad (2.56)$$

où f^* est la fonction conjuguée de la fonction f :

$$f^*(y) = \sup_x (xy - f(x))$$

f^* est également une fonction convexe et différentiable de \mathbb{R}^n et on peut répéter l'opération de conjugaison sans incohérence : $f^{**} = f$.

Ce résultat sera appliqué à la fonction énergie élastique (complémentaire) de l'élément discret qui, d'après (2.45), s'écrit :

$$w^*(M_L, T_L) = L \left(\left(\frac{M_L}{M_0} \right)^2 + \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^2 \right) s(\Phi) \text{ où } \Phi = \text{atan} \left(\frac{\frac{T_L}{T_0}}{\frac{M_L}{M_0}} \right) \quad (2.57)$$

Avant de passer au calcul proprement dit il faut préciser les propriétés de w^* déduites de celles de W^* :

- w^* est convexe, continue et positivement homogène de degré 2
- w^* s'annule pour certains couples (M_L, T_L) . On note I_0 l'ensemble où w^* (donc s) s'annule. I_0 est nécessairement un cône convexe. On définit également

$$I_\Phi = \{\Phi \in [0, 2\pi] / s(\Phi) = 0\}$$

Vu la convexité de I_0 , I_Φ est également convexe. Ainsi, en posant $\mathbf{x} = (\frac{M_L}{M_0}, \frac{T_L}{T_0})$ et $\mathbf{y} = (\frac{[\theta_y]}{\theta_0}, \frac{[u_x]}{u_0})$, la fonction w s'écrit

$$\begin{aligned} w(\mathbf{y}) &= \sup_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}\mathbf{y} - w^*(\mathbf{x})) \\ &= \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \lambda \geq 0}} (\lambda \mathbf{x}\mathbf{y} - w^*(\lambda \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Deux cas sont à distinguer selon que $s(\Phi)$ s'annule ou pas sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

- **cas 1** : $s(\Phi) \neq 0, \forall \Phi \in [0, 2\pi]$: Le maximum recherché dans l'équation (2.58) correspond alors à :

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2L} (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) \frac{1}{s(\Phi)} & \text{si } (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.59)$$

En se limitant au cas où $\|\mathbf{y}\| = 1$, on écrit $w([\theta_y], [u_x]) = \frac{1}{4L} k(\varphi)$ et par suite, en tenant compte de (2.59), on obtient

$$k(\varphi) = \sup_{\substack{\frac{M_L^2}{M_0^2} + \frac{T_L^2}{T_0^2} = 1 \\ (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) \geq 0}} \left(\frac{(M_L[\theta_y] + T_L[u_x])^2}{s(\Phi)} \right) \quad (2.60)$$

- **cas 2** : La fonction $s(\Phi)$ s'annule sur l'intervalle $I_0 = [\Phi_1, \Phi_2]$: on a alors

$$k(\varphi) = \sup \left\{ 4L \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \lambda \geq 0 \\ \Phi \in [\Phi_1, \Phi_2]}} (\lambda (M_L[\theta_y] + T_L[u_x])), \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) \geq 0 \\ \Phi \notin [\Phi_1, \Phi_2]}} \left(\frac{(M_L[\theta_y] + T_L[u_x])^2}{s(\Phi)} \right) \right\} \quad (2.61)$$

ou

$$\sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \lambda \geq 0 \\ \Phi \in [\Phi_1, \Phi_2]}} (\lambda (M_L[\theta_y] + T_L[u_x])) = \begin{cases} +\infty & \text{si } (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Finalement, en posant : $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{Bmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}$

$$k(\varphi) = \sup \left\{ 4L \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \lambda \geq 0 \\ \Phi \in [\Phi_1, \Phi_2]}} (\lambda \cos(\Phi - \varphi)), \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \cos(\Phi - \varphi) \geq 0 \\ \Phi \notin [\Phi_1, \Phi_2]}} \left(\frac{\cos^2(\Phi - \varphi)}{s(\Phi)} \right) \right\} \quad (2.62)$$

La résolution de ce problème conduit à deux cas :

- Pour φ donné, s'il existe $\Phi \in [\Phi_1, \Phi_2]$ tel que $\cos(\Phi - \varphi) > 0$, alors $k(\varphi) = +\infty$.
Ce cas apparaît lorsque : $\Phi_1 - \frac{\pi}{2} < \varphi < \Phi_2 - \frac{\pi}{2}$,
- Pour φ donné, si $\forall \Phi \in [\Phi_1, \Phi_2], \cos(\Phi - \varphi) \leq 0$, alors :

$$k(\varphi) = \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) \geq 0 \\ \Phi \notin [\Phi_1, \Phi_2]}} \left(\frac{(M_L[\theta_y] + T_L[u_x])^2}{s(\Phi)} \right) = \sup_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \cos(\Phi - \varphi) \geq 0 \\ \Phi \notin [\Phi_1, \Phi_2]}} \left(\frac{\cos^2(\Phi - \varphi)}{s(\Phi)} \right)$$

Ce cas apparaît lorsque : $\Phi_2 + \frac{\pi}{2} < \varphi < \Phi_1 - \frac{\pi}{2}$

Comme l'illustre la figure 2.6, le domaine où $k(\varphi)$ ne vaut pas l'infini est :

- $[0, 2\pi]$ si la fonction $s(\Phi)$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$,
- $\Phi_2 + \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \Phi_1 - \frac{\pi}{2}$ si la fonction $s(\Phi)$ s'annule sur $[\Phi_1, \Phi_2]$

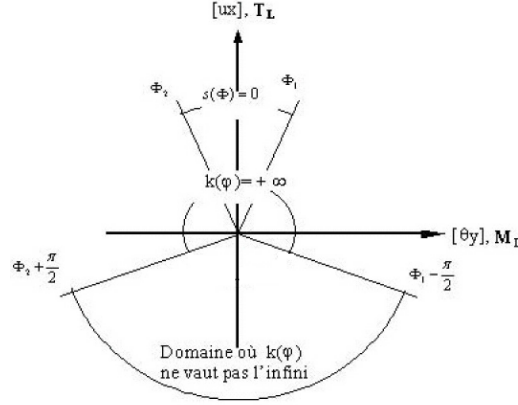


FIG. 2.6: *Domaine de divergence de $k(\varphi)$ en fonction du domaine où $s(\Phi)$ s'annule*

2.7 Étude du problème "plan"

Pour être mise en œuvre, l'analyse théorique présentée précédemment nécessite la réalisation d'un modèle tridimensionnel, des calculs statiques non-linéaires avec le *Code_Aster*® et des traitements spécifiques pour déduire le modèle de comportement recherché. L'élément de rotor fissuré est alors représenté en 3D, ce qui permet de traiter tout profil de fissure et d'appréhender les champs de déformations et de contraintes à proximité de la fissure. D'autre part, le calcul tient compte des conditions de contact unilatéral qui s'appliquent sur les lèvres de la fissure. Le problème a été nommé "plan" parce qu'au cours de cette première étude, on se contente d'appliquer un chargement (moment fléchissant et effort tranchant) dans le plan normal aux lèvres de la fissure conduisant, pour les profils de fissures étudiés, à une flexion de la structure dans ce même plan ([117] et [49]). En pratique, cela requiert de traiter des fissures dont la forme est symétrique par rapport à l'axe (ox) : l'orientation du chargement ne doit pas conduire à de la flexion déviée. Le modèle adopté est représenté sur la figure 2.7.

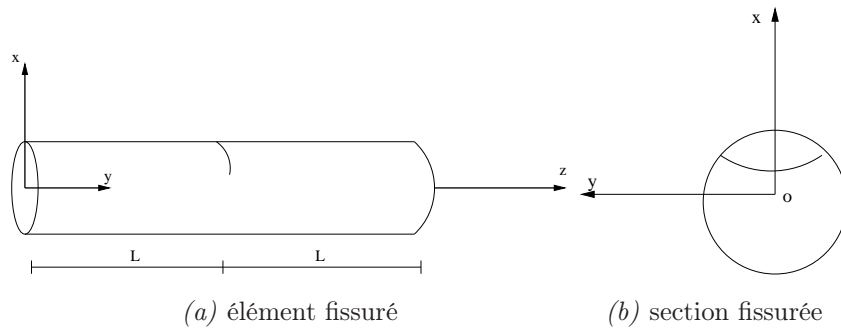


FIG. 2.7: *Modélisation tridimensionnelle de l'élément fissuré*

La longueur L doit être suffisamment grande pour que les perturbations dues à la présence de la fissure soient négligeables sur la forme des champs solutions au niveau des sections extrêmes. **En pratique, on adoptera $L = 2D$.** Nous avons pu vérifier que cette longueur est suffisante pour

garantir un comportement poutre des sections extrêmes. La section fissurée est localisée en $z = L$. La forme du front de fissure est spécifique au cas d'étude de l'utilisateur. En particulier, la fissure peut ne pas être connexe. L'élément est encasté "au sens de la théorie des poutre" à son extrémité $z = 0$ et soumis, à l'autre, au torseur d'efforts ($T_x = T_{2L}, M_y = M_{2L}$), à l'exclusion de tout autre effort. Ces deux conditions sont appliquées en s'assurant que les sections correspondantes sont assujetties à rester planes en moyenne, conformément à la solution de Saint Venant. En pratique, ces conditions sont appliquées en utilisant les fonctionnalités de raccord 3D-poutre du *Code_Aster*[©] [3, 102].

Les conditions de contact unilatéral sans frottement sont appliquées entre les lèvres de la fissure. Elles traduisent :

- l'absence de cisaillement sur les lèvres,
- leur non interpénétration,
- le fait que soit la fissure est ouverte et la contrainte normale est nulle, soit la contrainte normale est strictement négative et la fissure est fermée : la contrainte normale ne peut être qu'une compression.

En pratique, ces conditions sont appliquées en utilisant les fonctionnalités de contact unilatéral du *Code_Aster*[©].

2.7.1 Ecriture discrétisée de la fonction souplesse

Les calculs réalisés avec le *Code_Aster*[©] fournissent, pour les angles de chargement considérés $\Phi_i \in [0, 2\pi]$, les champs de déplacements correspondants. Connaissant, au niveau de l'extrémité libre ($z = 2L$), la rotation autour de (oy) et le déplacement selon (ox), $(\theta_y(2L), u_x(2L))$, l'énergie élastique est donnée par la formule de Clapeyron connue pour les problèmes linéaires et étendue au cas de notre problème. Pour chaque pas de chargement, on écrit

$$W^*(\Phi_i) = \frac{1}{2}(M_{2L}\theta_y(2L) + T_{2L}u_x(2L)), \quad \forall \begin{pmatrix} M_L = \cos(\Phi_i) \\ T_L = \sin(\Phi_i) \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

La souplesse de l'élément discret peut alors être déterminée aux points de calculs tridimensionnels par

$$s(\Phi_i) = \frac{W_s^*(\Phi_i)}{W_s^*(\Phi_i)} - 1 \quad (2.64)$$

$W_s^*(\Phi_i)$ est l'énergie élastique complémentaire de la structure soumise aux même pas de chargement et ne comportant pas de fissures.

2.7.2 Application de la démarche à une fissure à fond droit de profondeur 50%

Le maillage de l'élément fissuré a été réalisé conformément aux spécifications du paragraphe 2.7. La géométrie considérée représente un cylindre de diamètre $D = 1m$ et de longueur totale $2L = 4D$. La fissure, dont le fond est orienté selon l'axe (oy) , est contenue dans la section médiane du cylindre ($z = L$). La section fissurée est localisée par $x \leq 0$, cf. figure 2.8.

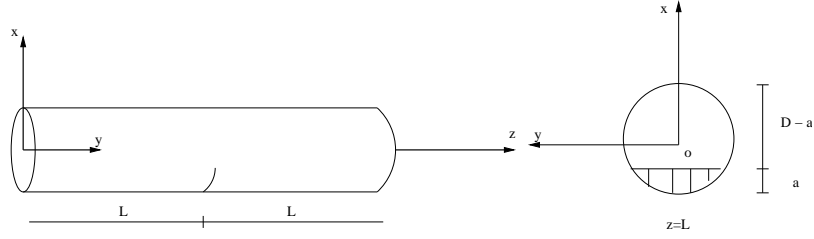


FIG. 2.8: *Modélisation tridimensionnelle de l'élément de poutre fissuré avec fissure à fond droit*

Une procédure GIBI ² paramétrée permet la réalisation du maillage tridimensionnel. Les données géométriques (longueur, diamètre), la profondeur de la fissure, sa position et le type de fond de fissure (fond droit ou elliptique), peuvent être modifiés selon les besoins de l'utilisateur. Le maillage est réalisé en éléments cubiques linéaires CUB8. L'identification de la fonction de souplesse, s , nécessite également des calculs tridimensionnels sur l'élément (de même géométrie) non fissuré. Le maillage de cet élément est (à la section fissurée près) identique à celui de l'élément fissuré. Cela permet en particulier d'assurer que $s(\Phi_i) = 0$ lorsque la fissure est totalement fermée.

2.7.2.1. Présentation de quelques résultats

La variation de la souplesse apportée par la section fissurée pour différentes profondeurs de fissure et un chargement, en $z = 2L$, conduisant au niveau de la section fissurée au couple d'efforts intérieurs $\begin{pmatrix} M_L = M_0 \cos(\Phi) \\ T_L = T_0 \sin(\Phi) \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 2.9.

La fissure reste pratiquement fermée sur un intervalle important $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, cf. figure 2.9(a). L'examen des courbes de souplesses sur cet intervalle, cf. figure 2.9(b), montre que pour toutes les profondeurs de fissures étudiées, la souplesse est minimale en $\Phi = \pi$. La phase d'ouverture conduit, quant à elle, à une évolution importante (mais régulière) de la souplesse. Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, le moment résultant au niveau du noeud discret modélisant la fissure, M_L , est de signe négatif. Il en résulte des contraintes de compression sur la partie fissurée de la section ce qui laisse penser au fait que seul son signe décide de l'écartement ou du rapprochement des lèvres de la fissure. La question qui se pose à ce stade est la suivante : **quand la fissure se ferme-t-elle totalement**

²mailleur du code d'éléments finis *CASTEM2000*® adopté par le *Code_Aster*®

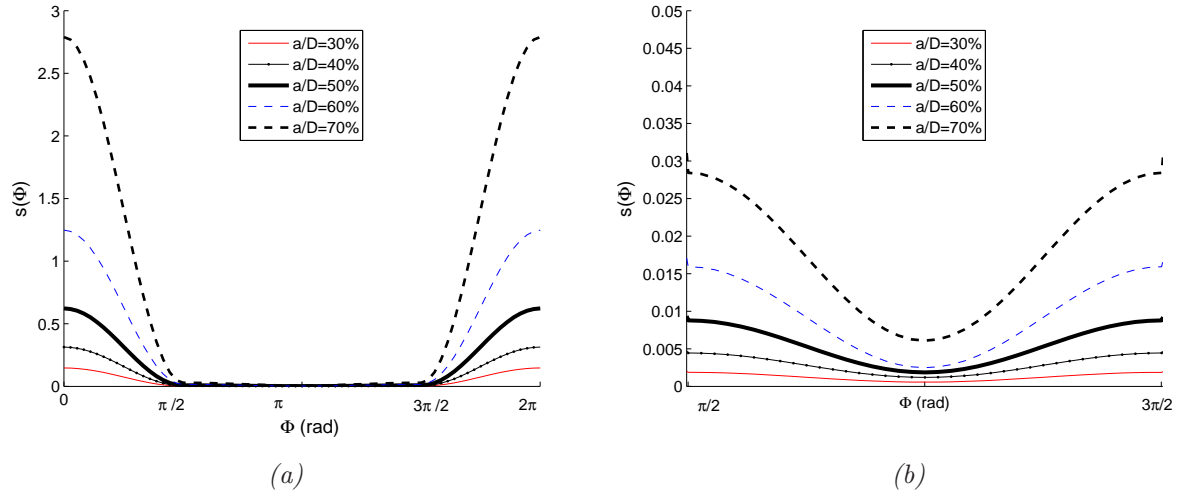


FIG. 2.9: Courbes de fonctions souplesses

($[\theta_y] = 0$ et $[u_x] = 0$) ?

Pour les fissures dont la profondeur ne dépasse pas le rayon de la section ($\frac{a}{D} \leq 0$), trois réponses possibles sont à examiner sachant que l'ensemble de cas de chargement conduisant à la fermeture totale de la fissure est un convexe :

- La fissure n'est jamais totalement fermée : sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on a $[\theta_y] = 0$, mais $[u_x] \neq 0$,
- La fissure se ferme totalement sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,
- La fissure est totalement fermée en $\Phi = \pi$ où la fonction souplesse montre un minimum absolu.

Pour répondre à cette question, on a réalisé des calculs tridimensionnels avec :

- un premier cas de chargement conduisant à un moment de flexion nul ($M_L = 0$) au niveau de la section fissurée,
- un deuxième cas de chargement conduisant à un effort tranchant résultant nul, ($T_L = 0$).

Les efforts intérieurs résultants, au niveau de la section fissurée sont reliés à ceux appliqués à l'extrémité libre par les relations :

$$\begin{cases} T_L = T_{2L} \\ M_L = M_{2L} + LT_{2L} \end{cases} \quad (2.65)$$

obtenues à partir des équations d'équilibre des poutres.

Chargement avec $M_L = 0$: Ce cas de chargement est obtenu en appliquant, au niveau de l'extrémité libre de la structure un couple de type $\begin{pmatrix} M_{2L} = p \\ T_{2L} = -\frac{p}{L} \end{pmatrix}$ conduisant au niveau de la section fissurée au couple d'efforts intérieurs $\begin{pmatrix} M_L = 0 \\ T_L = -\frac{p}{L} \end{pmatrix}$. A partir des résultats des calculs tridimensionnels, on a pu faire les constatations suivantes :

- $[\theta_y] = 0$

- $[u_x]$ varie linéairement avec T_L , la pente de la droite $[u_x] = f(T_L)$ croît avec la profondeur de la fissure. Cette constatation reste valable même pour des fissures de profondeur dépassant la moitié de la section ($\frac{a}{D} \geq 50\%$), cf. figure 2.10.

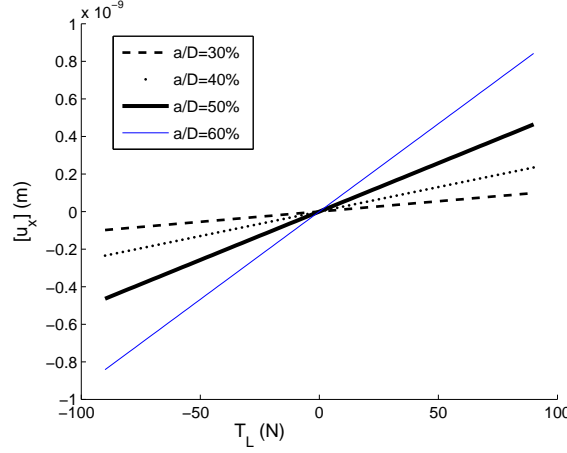


FIG. 2.10: Variation de $[u_x]$ en fonction de T_L : linéarité vis-à-vis du cisaillement

Chargement avec $T_L = 0$: Ce chargement est obtenu en appliquant, à l'extrémité libre du cylindre un couple d'efforts de la forme $\begin{pmatrix} M_{2L} = p \\ T_{2L} = 0 \end{pmatrix}$ conduisant au niveau de la section fissurée à $\begin{pmatrix} M_L = p \\ T_L = 0 \end{pmatrix}$. Les résultats numériques montrent que la structure est de comportement linéaire par morceaux. La rigidité varie selon le signe du moment de flexion responsable du mécanisme d'ouverture-fermeture (ou respiration) de la fissure. Lorsqu'il est de signe négatif, toute la partie fissurée de la section (au moins pour les fissures telles que $\frac{a}{D} \leq 50\%$) est comprimée et la fissure se ferme totalement. La structure retrouve la rigidité d'une structure saine. Cependant, lorsque le moment de flexion devient positif, la fissure s'ouvre totalement et la structure se trouve affaiblie. Le comportement est de nouveau linéaire mais avec une souplesse qui croît avec la profondeur de la fissure, cf. figure 2.11.

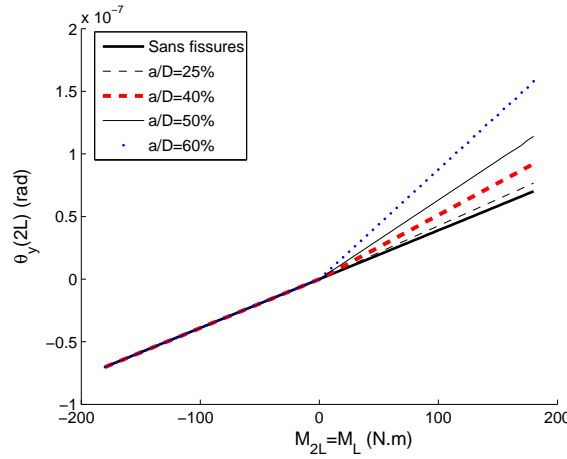
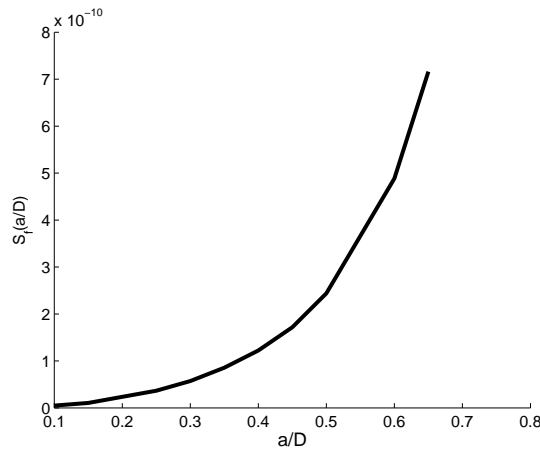
Pour un chargement avec $T_L = 0$ et des fissures telles que $\frac{a}{D} \leq 50\%$, on a alors :

- $[u_x] = 0$
- $[\theta_y] = 0$ lorsque $M_L \leq 0$
- $[\theta_y] = S_f(\frac{a}{D})M_L$, lorsque $M_L \geq 0$. La variation de S_f est donnée par la figure 2.12.

Ceci étant, on peut répondre à la question posée précédemment : **quand la fissure se ferme-t-elle totalement ($[\theta_y] = 0$ et $[u_x] = 0$) ?**

Pour une fissure à fond droit d'une profondeur telle que $\frac{a}{D} \leq 50\%$, la fermeture totale est atteinte lorsque :

- $M_L \leq 0$, conduisant à $[\theta_y] = 0$
- et $T_L = 0$, conduisant à $[u_x] = 0$

FIG. 2.11: *Comportement bilinéaire de la structure*FIG. 2.12: *Variation de s_f en fonction de la profondeur de la fissure*

pour les cas de chargement conduisant, au niveau de la section fissurée, au couple d'efforts intérieurs de la forme $\begin{pmatrix} M_L = M_0 \cos(\Phi) \\ T_L = T_0 \sin(\Phi) \end{pmatrix}$, la fermeture totale s'établit en $\Phi = \pi$. La rigidité de l'élément discret est, par conséquent, infinie sur tout l'intervalle $[\pi - \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}]$, cf. figure 2.22.

L'intervalle de nullité de la fonction $s(\Phi)$ permet de calculer le domaine de définition de $k(\varphi)$ qui est égal à :

- $[0, 2\pi]$ si $s(\Phi)$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$
- $[\varphi_{min}, \varphi_{max}] = [\Phi_2 + \frac{\pi}{2}, \Phi_1 - \frac{\pi}{2}]$ si la fonction $s(\Phi)$ s'annule sur $[\Phi_1, \Phi_2]$

La fonction $k(\varphi)$ est calculée sur cet intervalle avec la formule

$$k(\varphi) = \sup_{\substack{||\mathbf{x}||=1 \\ (M_L[\theta_y] + T_L[u_x]) \geq 0 \\ \Phi \notin [\Phi_1, \Phi_2]}} \left(\frac{(M_L[\theta_y] + T_L[u_x])^2}{s(\Phi)} \right)$$

avec $x = \begin{pmatrix} \frac{M_L}{M_0} = \cos(\Phi) \\ \frac{T_L}{T_0} = \sin(\Phi) \end{pmatrix}$ et $\varphi = \text{atan} \left(\frac{[u_x]}{[\theta_y]} \right)$ (2.66)

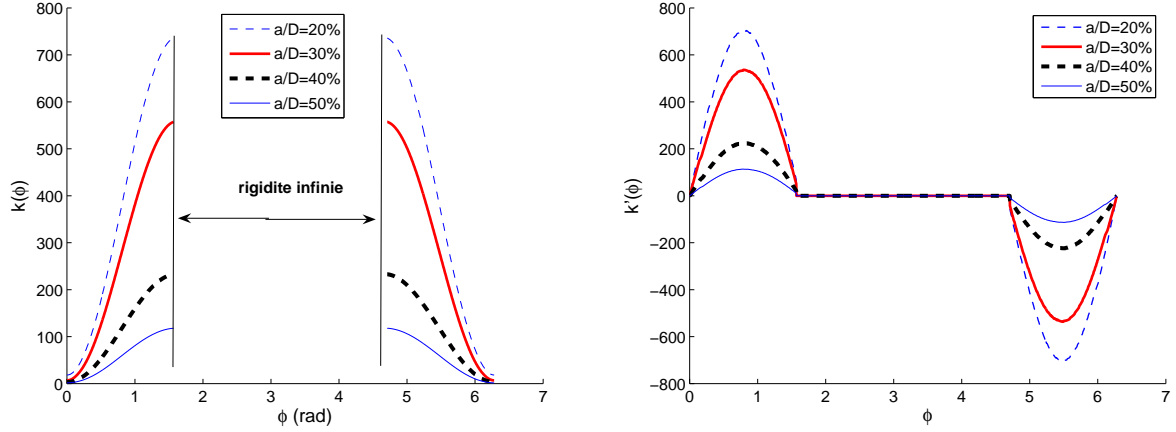


FIG. 2.13: Fonctions rigidité et sa dérivée

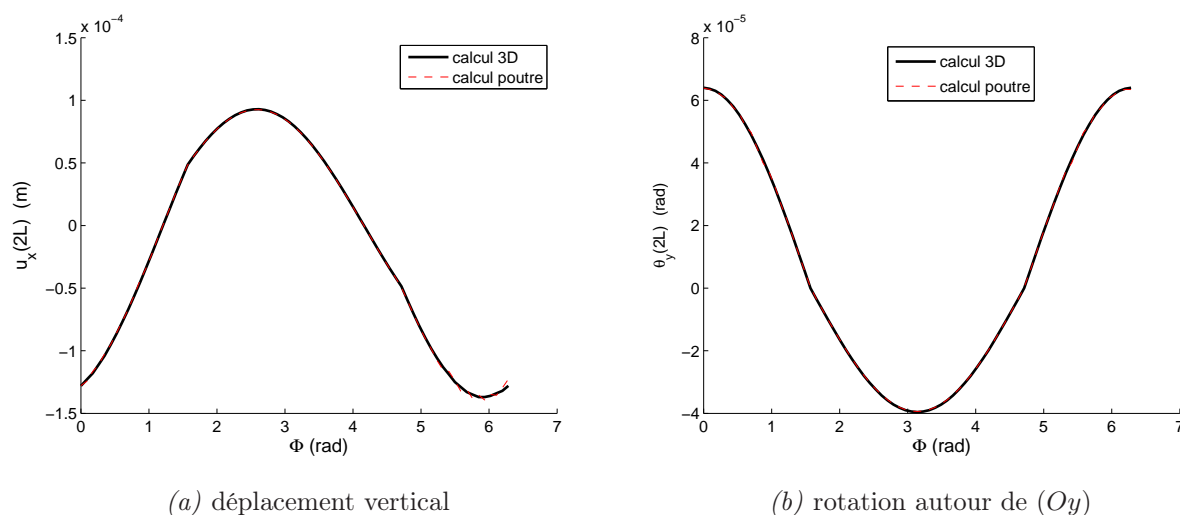
2.7.3 Validation du modèle

Les valeurs de $k(\varphi)$ et $k'(\varphi)$ issues des post-traitements des calculs 3D réalisés avec *Code_Aster*[©] ont été introduites dans une modélisation poutre du rotor fissuré : les tronçons sains ont été modélisés par des éléments classiques de poutre de Timoshenko tandis que la section médiane contenant une fissure à fond droit de profondeur relative $\frac{a}{D} = 50\%$ a été modélisée par deux noeuds confondus géométriquement et permettant des discontinuités de déplacement et de rotation ($[u_x]$ et $[\theta_y]$) vérifiant la loi de comportement non-linéaire (2.55). Comme le montrent les figures 2.14(a) et 2.14(b), le modèle proposé est en très bonne concordance avec les résultats 3D.

2.7.4 Conclusions

Dans cette première partie de l'identification de la loi de comportement d'un élément de poutre fissuré en flexion avec prise en compte des effets de cisaillement, deux conclusions importantes peuvent être déduites :

- le moment fléchissant au niveau de la section fissurée, M_L , est le paramètre de chargement responsable du rapprochement et de l'écartement des lèvres de la fissure. L'effort tranchant, T_L n'a d'effets que sur le déplacement relatif (selon sa direction) des lèvres de la fissure, auquel il est relié linéairement.

FIG. 2.14: *validation du modèle proposé*

- les effets du cisaillement et de la flexion sur la respiration de la fissure peuvent être découplés. L'énergie apportée par la fissure peut, comme on le verra plus loin, être écrite en dissociant ces deux effets ce qui facilitera énormément la résolution du problème lorsqu'on modélisera la flexion bi-axée avec prise en compte du cisaillement.

2.8 Étude de la flexion bi-axée avec prise en compte des effets de cisaillement

L'étude en flexion plane d'un élément de poutre fissuré a montré que les effets de cisaillement et de flexion peuvent être dissociés lorsqu'on veut identifier la loi de comportement de la section fissurée. Le moment de flexion, au niveau de la section fissurée, est responsable de la discontinuité de rotation, cependant l'effort tranchant conduit à une discontinuité de déplacement selon sa direction.

Dans cette partie du travail, on se propose d'étudier le cas de la flexion bi-axée. Le modèle retenu est celui d'une poutre fissurée d'axe (oz), de diamètre D , de section S , de longueur $2L$, contenant à mi-portée, une section fissurée, cf. figure 2.15. L'élément encastré à son extrémité $z = 0$, est soumis à l'autre ($z = 2L$) à deux moments de flexion et deux efforts tranchants : $(T_x(2L), T_y(2L), M_x(2L), M_y(2L))$.

L'identification de la loi de comportement se fait à partir de calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres des fissures. Les parties saines de l'élément sont représentées par des éléments poutre classiques, quant à la section fissurée, elle est modélisée par un élément nodal (longueur nulle) permettant des discontinuités de déplacements et de rotations. En effet, cet élément nodal est composé de deux ressorts non-linéaires découplés travaillant en flexion et en cisaillement, cf. figure 2.15.

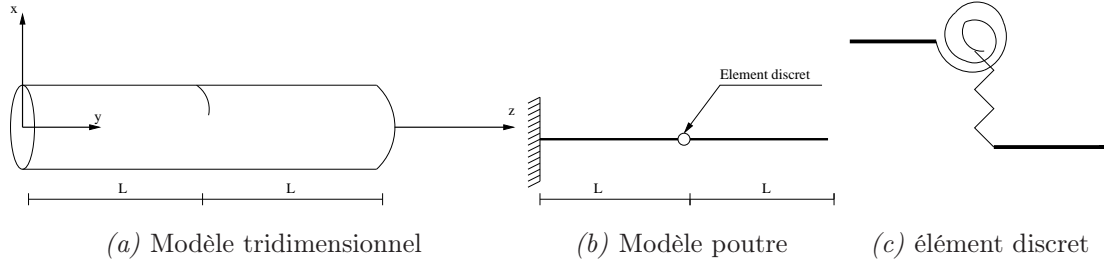


FIG. 2.15: Modélisation de l'élément de poutre fissuré

On rappelle ici les hypothèses retenues pour la modélisation :

- hypothèse des petites perturbations,
- matériau élastique linéaire et isotrope,
- fissures transverses de forme et en nombre quelconques,
- contact unilatéral sans frottement entre les lèvres des fissures,
- les fissures sont totalement fermées en l'absence de chargements.

2.8.1 Ecriture de la fonction énergie

2.8.1.1. Rappel

Dans leur étude d'identification de la loi de comportement d'un élément fissuré en flexion bi-axée, Andrieux et al. [5] et Varé et al. [115] ont suivi une démarche se basant sur les principes énergétiques pouvant être appliquée à toute forme de fissure. L'élément fissuré de la figure 2.15 est soumis, en $z = 2L$, au couple de moments $\mathbf{M}_{2L} = (M_x(2L), M_y(2L))$ à l'exclusion de tout autre effort. Andrieux [4] a démontré certaines propriétés de l'énergie élastique du problème, W^* , qui ont permis de réduire considérablement les calculs tridimensionnels nécessaires à l'identification de la loi de comportement recherchée. En particulier :

La fonction W^* est strictement convexe et positivement homogène de degré 2 :

$$\forall \lambda \geq 0 \quad W^*(\lambda M_x(2L), \lambda M_y(2L)) = \lambda^2 W^*(M_x(2L), M_y(2L)) \quad (2.67)$$

Cette propriété montre que dans une direction de chargement fixée, l'énergie de l'élément est quadratique vis-à-vis de \mathbf{M}_{2L} , comme dans le cas linéaire. Mécaniquement, ceci est dû au fait que la zone de contact entre les lèvres des fissures reste constante si l'on ne varie pas la direction du moment appliqué. Ainsi, l'énergie peut s'écrire, en distinguant l'apport de la section fissurée et celui des éléments sains, sous la forme :

$$\begin{aligned} W^*(\mathbf{M}_{2L}) &= W_s^*(\mathbf{M}_{2L}) + w^*(\mathbf{M}_{2L}) \\ &= \frac{L}{EI} \|\mathbf{M}_{2L}\|^2 (1 + s(\Phi)) \\ &= \frac{L}{EI} \|\mathbf{M}\|^2 (1 + s(\Phi)) \end{aligned} \quad (2.68)$$

où $\mathbf{M} = (M_x(L), M_y(L))$ désigne le couple de moments de flexion au niveau de la section fissurée, $W_s^*(\mathbf{M}_{2L})$ l'énergie élastique totale de l'élément sain sous le chargement \mathbf{M}_{2L} et $w^*(\mathbf{M}_{2L})$ l'énergie élastique supplémentaire due à la présence de la fissure. La direction de chargement est définie par l'angle $\Phi = \text{atan}\left(\frac{M_y(L)}{M_x(L)}\right)$. E est le module d'Young et I le moment d'inertie quadratique.

On voit bien qu'en l'absence de fissure ($s(\Phi) = 0$), $W^*(\mathbf{M}_{2L})$ se réduit à $W_s^*(\mathbf{M}_{2L})$. Dans le cas d'une fissure à fond droit d'une profondeur a telle que $\frac{a}{D} \leq 50\%$, la fissure est totalement fermée lorsque $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Son ouverture s'accompagne d'une évolution importante de $s(\Phi)$ conduisant à une fissure totalement ouverte lorsque $\Phi = \frac{3\pi}{2}$, cf. figure 2.16(a). D'après la propriété (2.67), la fonction $s(\Phi)$ ne dépend que de la direction de chargement définie par Φ : Elle est indépendante de $\|\mathbf{M}\|$, cf. figure 2.16(b).

Comme l'illustre la figure 2.17, l'énergie apportée par la section fissurée, $w^*(\mathbf{M}) = \frac{L}{EI} \|\mathbf{M}\|^2 s(\Phi)$,

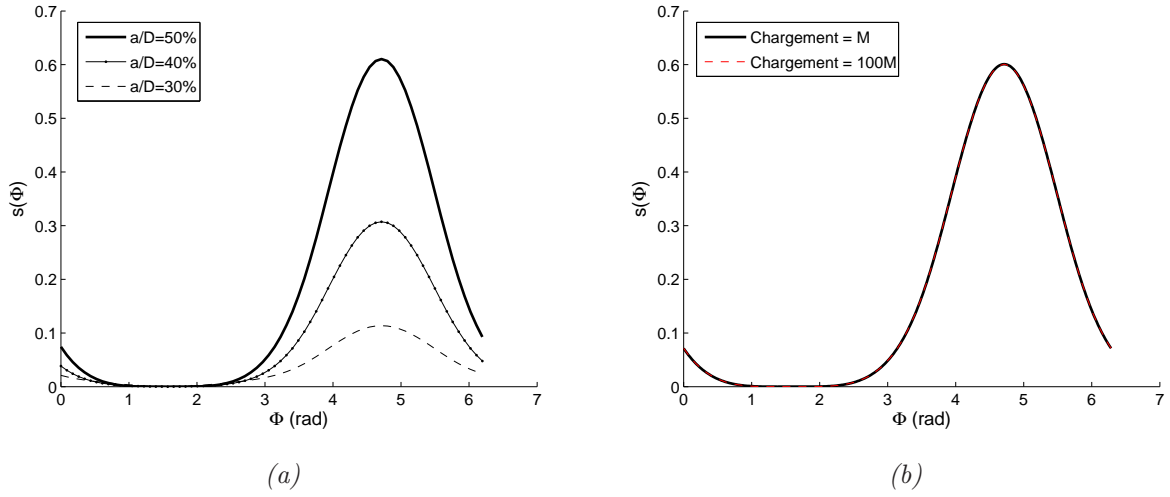


FIG. 2.16: *Souplesse apportées par la section fissurée*

est indépendante de L pour $L \geq 2D$ en vertu du principe de Saint Venant examiné au paragraphe 2.3.2 de ce chapitre. Dans ce cadre, la relation de comportement non-linéaire de l'élément discret modélisant la fissure s'obtient par dérivation de l'énergie élastique apportée par la section fissurée par rapport à \mathbf{M} .

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{pmatrix} [\theta_x] \\ [\theta_y] \end{pmatrix} = \frac{2L}{EI} \begin{pmatrix} s(\Phi) & -\frac{1}{2}s'(\Phi) \\ \frac{1}{2}s'(\Phi) & s(\Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Cependant, une loi de comportement exploitable par le code de lignes d'arbres CADIAC doit être de la forme $[\boldsymbol{\theta}] = f(\mathbf{M})$. Ceci a conduit les auteurs à introduire une propriété de la fonction énergie de déformation élastique apportée par la section fissurée $w([\boldsymbol{\theta}])$: **La fonction w est strictement convexe et positivement homogène de degré 2** :

$$\forall \lambda \geq 0 \quad w(\lambda[\theta_x], \lambda[\theta_y]) = \lambda^2 w([\theta_x], [\theta_y]) \quad (2.70)$$

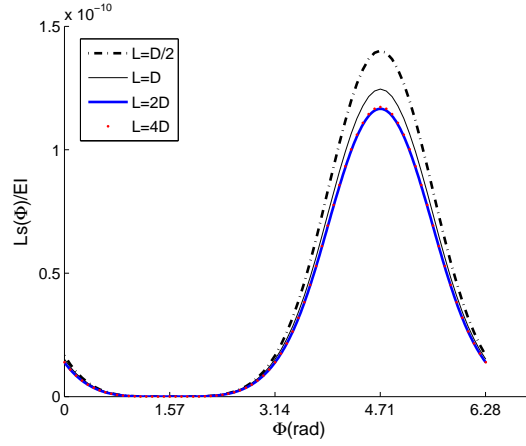


FIG. 2.17: *Invariance de l'énergie apportée par la section fissurée à partir de $\frac{L}{D} \geq 2$, $\|\mathbf{M}\| = 1$*

Cette propriété a permis d'écrire cette énergie sous la forme :

$$w([\theta_x], [\theta_y]) = \frac{EI}{4L} k(\varphi) \|\boldsymbol{\theta}\|^2 \text{ avec } \varphi = \text{atan}\left(\frac{[\theta_y]}{[\theta_x]}\right) \quad (2.71)$$

L'application de la transformée de Légendre-Fenchel permet, en établissant la relation reliant les deux fonctions énergies $w^*(\mathbf{M})$ et $w([\boldsymbol{\theta}])$, l'identification de la fonction rigidité $k(\varphi)$ à partir de la fonction souplesse $s(\Phi)$ issue des calculs tridimensionnels. Dans le cas d'une fissure à fond droit de profondeur relative $\frac{a}{D} = 50\%$, la fonction rigidité et sa dérivée sont données par la figure 2.18. La loi de comportement de la section fissurée est obtenue par dérivation de la fonction énergie de

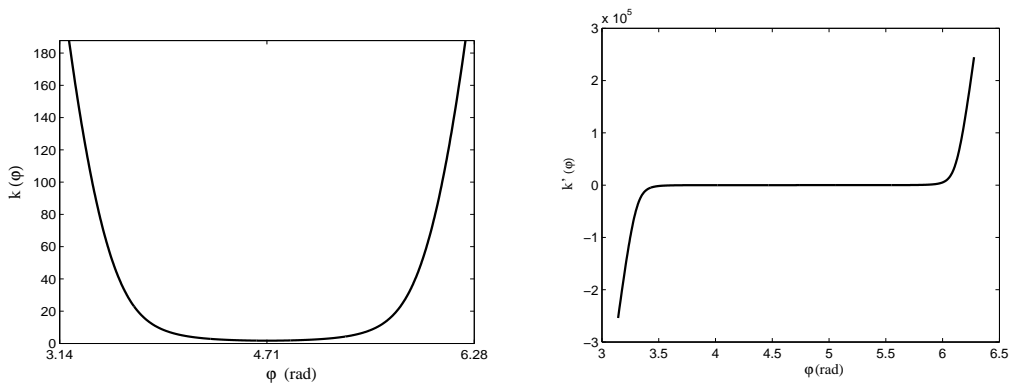


FIG. 2.18: *Variation de la rigidité et de sa dérivée*

déformation $w([\theta])$. On écrit alors

$$\begin{cases} M_x = \frac{\partial w([\theta])}{\partial [\theta_x]} \\ M_y = \frac{\partial w([\theta])}{\partial [\theta_y]} \end{cases} \quad (2.72)$$

soit,

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \frac{EI}{2L} \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta_x] \\ [\theta_y] \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

La fonction φ est comprise dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, ce qui traduit, là encore, la condition de non-interpénétration des lèvres de la fissure ($[\theta]_y \leq 0$). On constate également que l'évolution de la courbe est mal représentée en $\Phi = \frac{\pi}{2}$, cf. figure 2.19. Le point de discontinuité de la courbe ($\Phi = \frac{\pi}{2}$) correspond à la fermeture totale de la fissure ($\mathbf{s}(\Phi) = 0$).

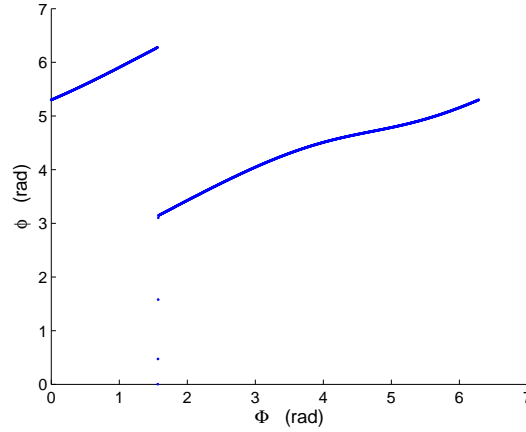


FIG. 2.19: Variation de φ en fonction de Φ

2.8.2 Prise en compte des effets de cisaillement

Dans cette section, l'élément de poutre fissuré est soumis à son extrémité libre au vecteur de chargement $\mathbf{F}(2L) = (T_x(2L), T_y(2L), M_x(2L), M_y(2L))$. Soit $W^*(\mathbf{F})$ l'énergie élastique totale du système. D'après ce qui précède, $W^*(\mathbf{F})$ peut se mettre sous la forme

$$W^*(\mathbf{F}) = W_s^*(\mathbf{F}) + w^*(\mathbf{F}) = W_s^*(\mathbf{F}) + w_f^*(\mathbf{F}) + w_c^*(\mathbf{F}) \quad (2.74)$$

où W_s^* désigne l'énergie élastique totale de l'élément sain sous le chargement $\mathbf{F}(2L)$ et $w^*(\mathbf{F})$ est l'énergie élastique due à la présence de la fissure. L'étude en flexion plane a montré que les effets de la flexion et du cisaillement peuvent être dissociés. En se basant sur cette constatation, w^* est décomposée en :

- $w_f^*(\mathbf{F}) = w_f^*(\mathbf{M})$ qui désigne la partie de $w^*(\mathbf{F})$ due au couple de moments de flexion $\mathbf{M} = (M_x(L), M_y(L))$ au niveau de la section fissurée, et
- $w_c^*(\mathbf{F}) = w_c^*(\mathbf{T})$ la partie due au couple d'efforts tranchants $\mathbf{T} = (T_x(L), T_y(L))$.

D'après les propriétés 3 et 4 de la section précédente, $w^*(\mathbf{F})$ est **strictement convexe et positivement homogène de degré 2 par rapport à ses arguments**, d'où la propriété suivante

Propriété 10 *Chacune des fonctions $w_c^*(\mathbf{T})$ et $w_f^*(\mathbf{M})$ est strictement convexe par rapport à ses arguments.*

Propriété 11 *Chacune des fonctions $w_c^*(\mathbf{T})$ et $w_f^*(\mathbf{M})$ est positivement homogène de degré 2.*

$$\forall \lambda \geq 0 \text{ on a : } \begin{cases} w_f^*(\lambda \mathbf{M}) = \lambda^2 w_f^*(\mathbf{M}) \\ w_c^*(\lambda \mathbf{T}) = \lambda^2 w_c^*(\mathbf{T}) \end{cases} \quad (2.75)$$

Il faut noter qu'une **hypothèse essentielle** à l'obtention de la propriété 11 est que **le jeu entre les lèvres des fissures est nul en absence de chargement**. Pour l'apport des moments de flexion, on garde la forme quadratique de w_f^* utilisée dans l'étude établie par Andrieux et al. [5], soit :

$$w_f^*(\mathbf{M}) = \frac{L}{EI} \|\mathbf{M}\|^2 s(\Phi), \text{ avec } \Phi = \text{atan}\left(\frac{M_y(L)}{M_x(L)}\right) \quad (2.76)$$

L'énergie due aux effets de cisaillement au niveau de la section fissurée est également quadratique par rapport à ses arguments et peut se mettre sous la forme

$$w_c^*(\mathbf{T}) = \frac{L}{\mu k S} \|\mathbf{T}\|^2 s_c(\Phi_c), \text{ avec } \Phi_c = \text{atan}\left(\frac{T_y(L)}{T_x(L)}\right) \quad (2.77)$$

Grâce à la propriété 11, le problème d'identification de la fonction w_c^* sur \mathbb{R}^2 est réduit à l'identification de la fonction souplesse $s_c(\Phi_c)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ en considérant le cas particulier $\|\mathbf{T}\| = 1$.

En se basant sur les résultats de l'étude du problème "plan", Varé et Andrieux [116] ont présenté une forme plus simple de w_c^* . Ils ont ramené le problème, pour certaines formes de fissures, à l'identification de trois constantes. Soit

$$w_c^*(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} T_x^2(L) s_x + \frac{1}{2} T_y^2(L) s_y + s_{xy} T_x(L) T_y(L) \quad (2.78)$$

s_x , s_y et s_{xy} ne dépendent que de la géométrie de la fissure, elles sont indépendantes des paramètres de chargement et identifiées à partir des trois calculs unitaires suivants :

- $w_c^*(T_x = 1, T_y = 0)$
- $w_c^*(T_x = 0, T_y = 1)$,
- $w_c^*(T_x = 1, T_y = 1)$

Ce modèle implémenté dans CADIYAC a permis l'obtention, pour certaines géométries de fissures, de résultats en excellent accord avec les calculs tridimensionnels. Cependant, il ne peut être appliqué à toute géométrie de fissure affectant des poutres de section transversale de forme quelconque. En effet, les efforts de cisaillement au niveau de la section fissurée conduisent à l'ouverture de la fissure selon le mode II et/ou le mode III (modes de rupture). Ceci dépend de la direction de l'effort de cisaillement définie ici par Φ_c . La surface de contact entre les lèvres des fissures, et par conséquent la souplesse additionnelle due à leur présence, est fonction de la direction de l'effort de cisaillement appliqué.

Notre démarche, basée sur des propriétés énergétiques, peut, sans simplifications particulières, être appliquée à toute géométrie de fissure.

2.8.3 Loi de comportement de la section fissurée

On se propose ici d'identifier la loi de comportement de l'élément discret modélisant la fissure. Afin d'être exploitable par le code CADIYAC des lignes d'arbres développé à EDF, la loi de comportement non-linéaire doit être de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = f\left(\begin{Bmatrix} [\mathbf{u}] \\ [\boldsymbol{\theta}] \end{Bmatrix}\right) \quad (2.79)$$

avec

$$[\mathbf{u}] = \begin{Bmatrix} [u_x] \\ [u_y] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x(L^+) - u_x(L^-) \\ u_y(L^+) - u_y(L^-) \end{Bmatrix}$$

et

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{Bmatrix} [\theta_x] \\ [\theta_y] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x(L^+) - \theta_x(L^-) \\ \theta_y(L^+) - \theta_y(L^-) \end{Bmatrix}$$

Finalement c'est la matrice de rigidité de l'élément nodal qui doit être identifiée. Ceci nous conduit à exploiter les propriétés de la fonction énergie de déformation élastique apportée par la section fissurée $w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])$ pour des discontinuités de déplacements $[\mathbf{u}]$ et des discontinuités de rotations $[\boldsymbol{\theta}]$.

Les effets de cisaillement et de flexion au niveau de la section fissurée pouvant être dissociés, $w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])$ est de la forme :

$$w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}]) = w_f([\boldsymbol{\theta}]) + w_c([\mathbf{u}]) \quad (2.80)$$

Dans l'expression de $w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])$, $w_f([\boldsymbol{\theta}])$ et $w_c([\mathbf{u}])$ sont les apports respectifs de la flexion et du cisaillement. Comme on l'a déjà décrit dans le paragraphe 2.8.1, Andrieux et Varé ont développé une méthode originale de calcul de la loi de comportement en flexion d'une section de poutre fissurée. En utilisant les propriétés des fonctions énergies, ils ont réussi à identifier la fonction $k(\varphi)$ à partir des valeurs de $s(\Phi)$ issues de calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral sans frottement entre les lèvres des fissures. Dans un rapport interne d'EDF-R&D, Varé [114] a détaillé la démarche d'identification de la fonction $k(\varphi)$. Le modèle a permis d'enrichir l'ancien modèle de fissure intégré dans le Code CADIYAC qui ne tenait compte des phénomènes de respiration des

fissures sous l'action des chargements que de façon grossière et par l'introduction de fonctions de fermeture plus ou moins arbitrairement choisies.

En suivant la démarche proposée par Andrieux et Varé, on écrit $w_c([\mathbf{u}])$ sous la forme :

$$w_c([\mathbf{u}]) = \frac{\mu k S}{4L} \|\mathbf{u}\|^2 k_c(\varphi_c) \text{ avec } \varphi_c = \text{atan}\left(\frac{[u_y]}{[u_x]}\right) \quad (2.81)$$

La transformée de Legendre-Fenchel permet d'établir la relation reliant w_c à w_c^* en écrivant :

$$\begin{aligned} w_c([\mathbf{u}]) &= \sup_{\mathbf{T}} (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}] - w^*(\mathbf{T})) \\ &= \sup_{\substack{\|\mathbf{T}\|=1 \\ \lambda \geq 0}} (\lambda \mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}] - w^*(\lambda \mathbf{T})) \\ &= \sup_{\substack{\|\mathbf{T}\|=1 \\ \lambda \geq 0}} (\lambda \mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}] - \lambda^2 \frac{L}{\mu k S} \|\mathbf{T}\|^2 s_c(\Phi_c)) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Remarque importante : Contrairement au cas de la flexion où la souplesse apportée par l'élément nodal représentant la section fissurée peut s'annuler pour certains couples de moments pouvant conduire à une fermeture totale de la fissure, la linéarité constatée vis-à-vis de l'effort tranchant montre que la souplesse due au cisaillement ne s'annule jamais :

$$\forall \mathbf{T} \neq \mathbf{0}, \text{ on a } [\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$$

Ainsi, le maximum recherché dans (2.82) est atteint lorsque :

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\mu k S}{2L} \frac{\mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}]}{s_c(\Phi_c)} & \text{si } \mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}] \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.83)$$

La relation entre la rigidité $k_c(\varphi_c)$ et la souplesse $s_c(\Phi_c)$ est, finalement, donnée par :

$$k_c(\varphi_c) = \sup_{\substack{\|\mathbf{T}\|=1 \\ \mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}] \geq 0}} \left(\frac{(\mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}])^2}{s_c(\Phi_c)} \right) \quad (2.84)$$

Ainsi, pour

$$[\mathbf{u}] = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_c \\ \sin \varphi_c \end{Bmatrix} \text{ et } \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \cos \Phi_c \\ \sin \Phi_c \end{Bmatrix}$$

$$k_c(\varphi_c) = \sup_{\cos(\Phi_c - \varphi_c) \geq 0} \left(\frac{\cos^2(\Phi_c - \varphi_c)}{s_c(\Phi_c)} \right) \quad (2.85)$$

La condition $\cos(\Phi_c - \varphi_c) \geq 0$ conduit à chercher, pour φ_c donné, le maximum pour $\Phi_c \in [\varphi_c - \frac{\pi}{2}, \varphi_c + \frac{\pi}{2}]$. La relation (2.85) devient :

$$k_c(\varphi_c) = \sup_{\Phi_c \in [\varphi_c - \frac{\pi}{2}, \varphi_c + \frac{\pi}{2}]} \left(\frac{\cos^2(\Phi_c - \varphi_c)}{s_c(\Phi_c)} \right) \quad (2.86)$$

La loi de comportement de la section fissurée est obtenue par dérivation de la fonction énergie de déformation $w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])$. On écrit alors

$$\begin{cases} T_x = \frac{\partial w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])}{\partial [u_x]} = \frac{\partial w_c([\mathbf{u}])}{\partial [u_x]}, T_y = \frac{\partial w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])}{\partial [u_y]} = \frac{\partial w_c([\mathbf{u}])}{\partial [u_y]} \\ M_x = \frac{\partial w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])}{\partial [\theta_x]} = \frac{\partial w_f([\boldsymbol{\theta}])}{\partial [\theta_x]}, M_y = \frac{\partial w([\mathbf{u}], [\boldsymbol{\theta}])}{\partial [\theta_y]} = \frac{\partial w_f([\boldsymbol{\theta}])}{\partial [\theta_y]} \end{cases} \quad (2.87)$$

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu k S}{2L} k_c(\varphi_c) & -\frac{\mu k S}{4L} k'_c(\varphi_c) & 0 & 0 \\ \frac{\mu k S}{4L} k'_c(\varphi_c) & \frac{\mu k S}{2L} k_c(\varphi_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{2L} k(\varphi) & -\frac{EI}{4L} k'(\varphi) \\ 0 & 0 & \frac{EI}{4L} k'(\varphi) & \frac{EI}{2L} k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_x] \\ [u_y] \\ [\theta_x] \\ [\theta_y] \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

2.8.4 Application de la démarche à une fissure à fond droit de profondeur 50%

Des calculs éléments finis tridimensionnels ont été réalisés sous le *Code_Aster*[©] pour identifier la fonction $s_c(\Phi_c)$. L'élément de poutre fissuré (figure 2.15) est alors soumis, en son extrémité libre ($z = 2L$), au vecteur de chargement défini par

$$\mathbf{F} = \left(T_x(2L) = \cos(\Phi_c), T_y(2L) = \sin(\Phi_c), M_x(2L) = LT_y(2L), M_y(2L) = -LT_x(2L) \right)$$

ce qui conduit, au niveau de la section fissurée ($z = L$), au vecteur des efforts intérieurs

$$(\mathbf{T}, \mathbf{M}) = \left(T_x(L), T_y(L), M_x(L), M_y(L) \right) = \left(T_x(2L), T_y(2L), 0, 0 \right)$$

L'énergie apporté par l'élément nodal représentant la section fissurée w^* se réduit, ainsi, à w_c^* . L'angle Φ_c parcourt l'intervalle $[0, 360^\circ[$ à raison d'un cas de chargement tous les 5° , soit 72 cas de chargement au total. L'identification de $s_c(\Phi_c)$ nécessite également la réalisation des calculs tridimensionnels avec les mêmes cas de chargement sur l'élément (de même géométrie) non fissuré. La formule de Clapeyron permet de calculer pour chaque pas de chargement les énergies élastiques W_s^* et W^* des deux éléments sain et fissuré, respectivement. Par suite, w_c^* est donnée par

$$w_c^* = W^* - W_s^*$$

Au niveau de la section fissurée, on a $\|\mathbf{T}\| = 1$. Ainsi d'après (2.77), la fonction souplesse est obtenue, pour tout pas de chargement, par

$$s_c(\Phi_c) = \mu k S \frac{w_c^*(\mathbf{T})}{L}$$

La figure 2.20 montre l'évolution de w_c^* et celle de s_c en fonction de Φ_c pour une fissure à fond droit de profondeur relative $\frac{a}{D} = 50\%$. On remarque en particulier que s_c ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$. Après avoir identifié, aux points de calculs tridimensionnels, la fonction s_c , on procède à son interpolation sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. La fonction de rigidité $k_c(\varphi_c)$ est ensuite calculée grâce à la formule (2.86), cf. figure 2.21. Finalement, sa dérivée $k'_c(\varphi_c)$ est calculée par la méthode des différences centrées.

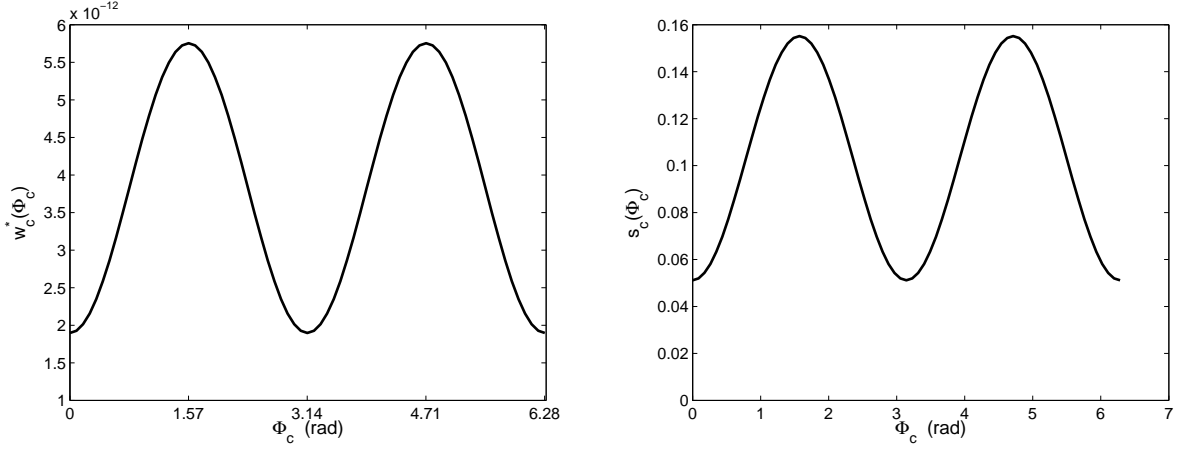


FIG. 2.20: Énergie élastique w_c^* et souplesse s_c dues au cisaillement

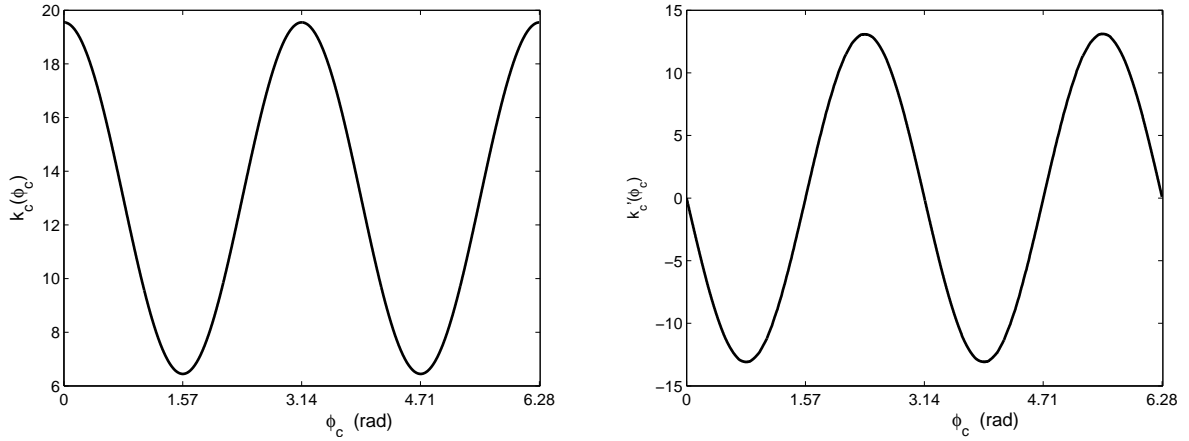


FIG. 2.21: Fonctions rigidité $k_c(\phi_c)$ et sa dérivée $k'_c(\phi_c)$ pour $\frac{a}{D} = 50\%$

2.8.5 Validation du modèle

On considère un cylindre d'axe (oz) de diamètre $D = 0.5m$, de moment d'inertie quadratique $I = \frac{\pi D^4}{64}$, de longueur totale égale à $3m$, encastré en $z = 0$ et soumis à l'autre extrémité à un

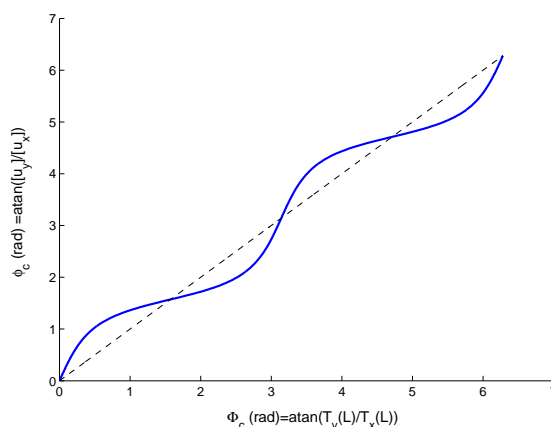


FIG. 2.22: Angle de chargement Φ_c / Angle réponse φ_c pour $\frac{a}{D} = 50\%$

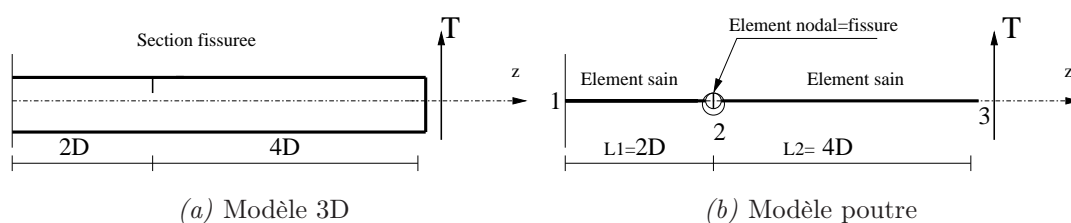


FIG. 2.23: Modélisation de la structure par éléments finis 3D et poutre

couple d'efforts

$$\mathbf{T} = (T_x = \cos(\alpha), T_y = \sin(\alpha)) \text{ avec } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Le cylindre comporte, en $z = 1m$, une fissure à fond droit de profondeur relative $\frac{a}{D} = 50\%$. Des calculs tridimensionnels tenant compte du contact sans frottement entre les lèvres de la fissure sont réalisés sous le *Code_Aster*[©]. D'une autre part, on appelle modèle poutre la structure formée de deux éléments poutre sains de Timoshenko de longueurs respectives $1m$ et $2m$ reliés en $z = 1m$ par un noeud discret de longueur nulle. La section fissurée est située au niveau du noeud 2, cf. figure 2.23. On a considéré deux cas :

- dans le premier, les effets de cisaillement au niveau de la section fissurée sont négligés. Seules les discontinuités de rotations sont alors permises au niveau du noeud 2 ($[u_x] = [u_y] = 0$). La loi de comportement retenue est donnée par la relation (2.73),
- dans le second, toutes les discontinuités de déplacements et de rotations sont permises au niveau du noeud 2 dont la loi de comportement non-linéaire est donnée par la relation (2.88).

La figure 2.24 montre que les résultats sont satisfaisants. La représentation de l'élément tridimensionnel par un modèle poutre avec un élément nodal de deux ressorts non-linéaires travaillant en flexion et en cisaillement permet de réduire considérablement les coûts de calculs. Il apparaît que les effets du cisaillement sur le mécanisme de respiration de la fissure sont négligeables. Les glissements relatifs normalisés entre les lèvres (divisés par le diamètre D de la section) restent faibles comparés aux sauts de rotations dues aux moments de flexion, cf. figure 2.25.

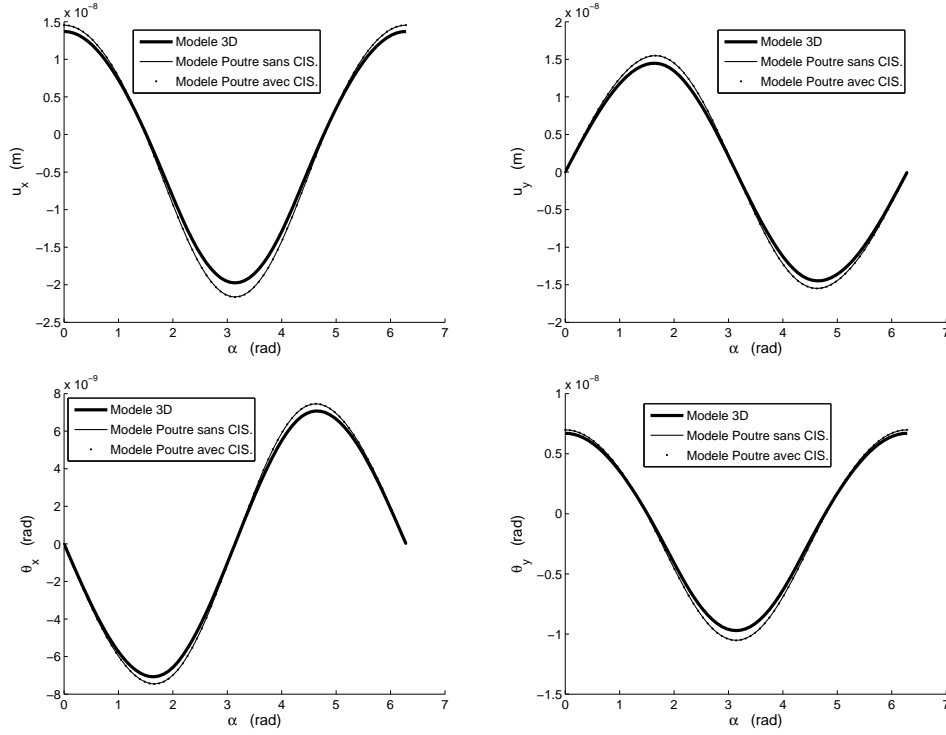


FIG. 2.24: Comparaison du modèle proposé aux résultats tridimensionnels, $\frac{a}{D} = 50\%$

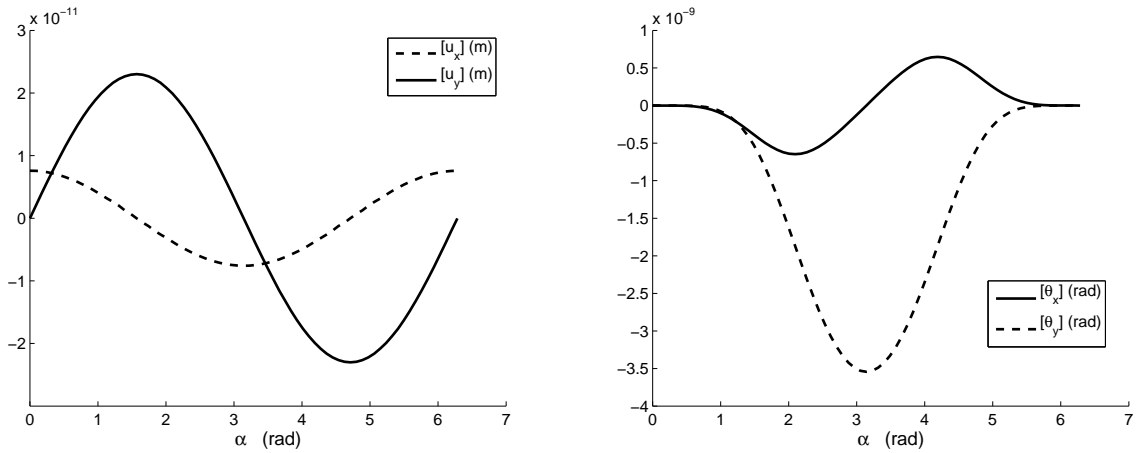


FIG. 2.25: Discontinuités de déplacements et de rotations au niveau de la section fissurée, $\frac{a}{D} = 50\%$

2.9 Quelques remarques sur la prise en compte de la torsion

Les retours d'expérience internationaux sur les arbres de machines tournantes ont montré la présence de fissures transversales lorsque l'arbre est sollicité en flexion, et des fissures hélicoïdales

dans le cas de sollicitations de torsion [126]. Dans les deux cas, les efforts de torsion deviennent plus importants au cours du démarrage ou de l'arrêt des machines à cause des effets d'accélération. Il est alors important d'en tenir compte dans l'identification de loi de comportement d'une section de rotor fissurée.

L'élément de poutre fissuré, cf. figure 2.26, est soumis, au niveau de la section libre ($z = 2L$), au vecteur chargement (M_x, M_y, M_z) .

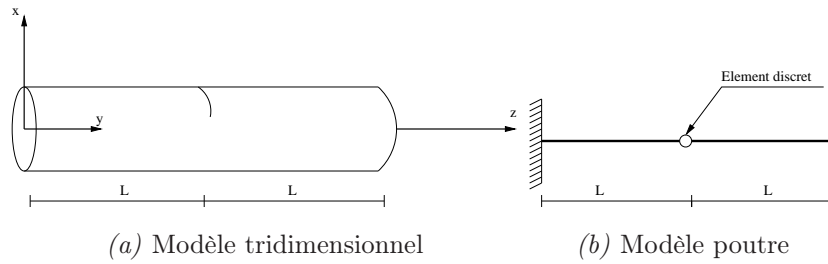


FIG. 2.26: Modélisation de l'élément de poutre fissuré

Andrieux [4] a présenté les conditions de découplage des effets de flexion et de torsion conduisant à écrire l'énergie de déformation supplémentaire due à la présence de la fissure sous la forme :

$$w^*(M_x, M_y, M_z) = w_f^*(M_x, M_y) + w_t^*(M_z) \quad (2.89)$$

On rappelle que w_f^* est l'apport d'énergie de flexion dû à la fissure donné par

$$w_f^*(\mathbf{M}) = \frac{L}{EI}(M_x^2 + M_y^2)s(\Phi), \text{ avec } \Phi = \text{atan}\left(\frac{M_y}{M_x}\right)$$

w_t^* peut se mettre sous la forme

$$w_t^*(M_z) = \frac{L}{\mu J} M_z^2 s_t$$

$J = \frac{\pi R^4}{2}$ est le moment d'inertie de torsion et s_t est un coefficient qui mesure la souplesse de torsion de l'élément discret représentant la fissure.

En dérivant w_t^* par rapport à M_z , on obtient la relation de comportement

$$[\theta_z] = \frac{2Ls_t}{\mu J} M_z$$

En l'absence de frottement sur les lèvres des fissures, s_t est indépendant du chargement. Ainsi, s_t ne dépend que des données géométriques du problème comme dans le cas linéaire (sans conditions de contact unilatéral entre les lèvres). De ce fait, s_t peut être identifié à partir d'un seul calcul tridimensionnel avec un chargement, en ($z = 2L$), donné par $(M_x = 0, M_y = 0, M_z = 1)$, cf. figure 2.26. En l'absence de fissures $s_t = 0$, sinon $s_t > 0$.

La loi de comportement de la section fissurée est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EI}{2L}k(\varphi) & -\frac{EI}{4L}k'(\varphi) & 0 \\ \frac{EI}{4L}k'(\varphi) & \frac{EI}{2L}k(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu J}{2L}k_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta_x] \\ [\theta_y] \\ [\theta_z] \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

avec $k_t = \frac{1}{s_t}$. Les conditions favorables au découplage flexion-torsion sont données par [5] :

Lemme 1 Soit \mathbf{u}_T le champ de déplacement solution du problème unilatéral sans frottement défini par les équations (2.26)-(2.31) en torsion pure ($\mathbf{M}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) = (0, 0, M_z)$). Si

1. la réponse du tronçon à cette sollicitation s'opère sans contact ni ouverture sur les lèvres de la fissure, c'est à dire :

$$\sigma_{zz}(\mathbf{u}_T) = 0 \text{ et } [\mathbf{u}_T] \cdot \mathbf{e}_z = 0 \text{ sur } \Gamma$$

2. hormis la rotation autour de (oz), les rotations en extrémité du tronçon sont nulles :

$$\boldsymbol{\Omega}_{2L}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{e}_x = \boldsymbol{\Omega}_{2L}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{e}_y = 0 \text{ c.à d. } \theta_x(2L) = \theta_y(2L) = 0$$

alors le champ de déplacement solution du problème unilatéral sans frottement défini par les équations (2.26)-(2.31) sous un chargement de la forme $\mathbf{M}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) = (M_x, M_y, M_z)$ est la somme du champ solution du problème sous le couple de moments de flexion $(M_x, M_y, 0)$ et celui du problème sous le moment de torsion $(0, 0, M_z)$:

$$\mathbf{u}(M_x, M_y, M_z) = \mathbf{u}(M_x, M_y) + M_z \mathbf{u}_T$$

de plus, l'énergie de déformation totale du solide peut être décomposée mettant en évidence une dépendance quadratique vis-à-vis du moment de torsion :

$$W^*(M_x, M_y, M_z) = W^*(M_x, M_y) + L \frac{M_z^2}{\mu J} (1 + s_t)$$

Lemme 2 Soit \mathbf{u}_{N+} le champ de déplacement solution du problème unilatéral défini par les équations (2.26)-(2.31) sous un effort de traction unitaire : $\mathbf{M}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{R}_{2L}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z) = (0, 0, 1)$. Si

1. la rotation de torsion est nulle :

$$\boldsymbol{\Omega}_{2L}(\mathbf{u}_{N+}) \cdot \mathbf{e}_z = 0, \text{ soit } \theta_z(2L) = 0$$

2. sous l'effet d'un moment de torsion unitaire seul, le déplacement axial de la section libre ($z = 2L$) est nul :

$$\mathbf{U}_{2L}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{e}_z = 0, \text{ soit } u_z(2L) = 0$$

alors, la première condition du lemme 1 est réalisée.

En conclusion, les conditions de découplage des effets de flexion et de torsion sont :

$$\Omega_{2L}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{e}_x = \Omega_{2L}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{e}_y = U_{2L}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{e}_z = \Omega_{2L}(\mathbf{u}_{N+}) \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (2.91)$$

Il est important de noter que ces conditions sont indépendantes de la forme des fissures considérées.

En se basant sur des calculs tridimensionnels réalisés avec le *Code_Aster*®, on a pu vérifier les conditions de découplage (2.91) pour des fissures à fonds droit ou elliptique. En plus, on a mis en évidence la linéarité du comportement de l'élément fissuré vis-à-vis de la torsion, cf. figure 2.27.

Il est important de noter que la présence de la fissure a engendré un couplage des déplacements selon (ox) et (oy) avec la rotation de torsion, cf. figure 2.28.

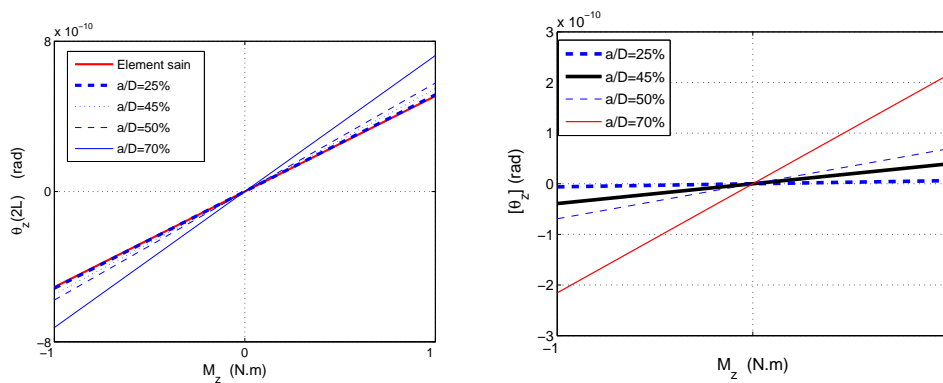


FIG. 2.27: *Linéarité de la réponse en torsion*

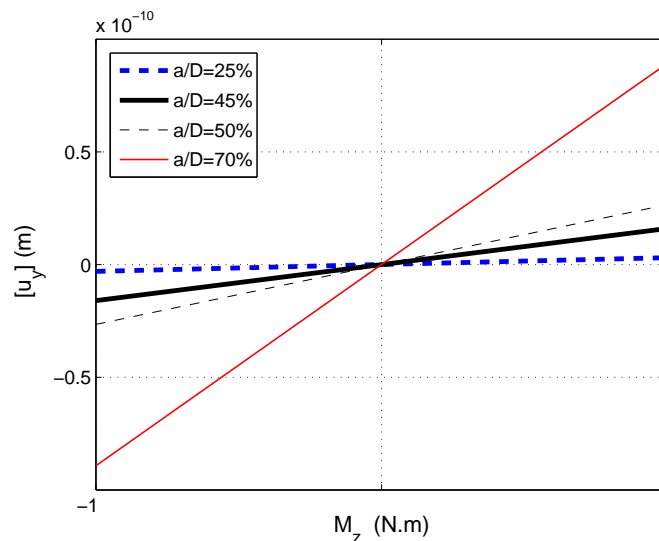


FIG. 2.28: *Couplage des déplacements transversaux avec l'angle de torsion*

2.10 Conclusions

L'étude menée consiste à introduire, dans la loi de comportement d'une section de poutre fissurée, les effets du cisaillement. Des calculs tridimensionnels ont été réalisés afin d'identifier la loi de comportement recherchée. En particulier, la modélisation tridimensionnelle du problème a permis de représenter finement l'évolution de la souplesse locale apportée par la fissure.

La démarche d'identification proposée dans ce chapitre peut être appliquée à toute géométrie de fissure. Elle s'applique sans modifications aux cas de fissures multiples affectant une même section. Comme l'illustrent les figures 2.24 et 2.25, les effets du cisaillement sur la respiration de la fissure peuvent, au moins en statique, être négligés devant ceux de la flexion. Le rapprochement et l'écartement des lèvres de fissures sont régis par les contraintes normales. Le glissement relatif normalisé entre les lèvres, dû surtout au cisaillement, reste faible par rapport aux sauts de rotations, dus à la flexion, pouvant être atteints, cf. figure 2.25.

Pour des fissures à fonds droit ou elliptique, on a mis en évidence la linéarité de la réponse en torsion. Dans ce cadre, le couplage entre les déplacements transversaux d'une part et la rotation de torsion d'autre part peut être un bon indicateur de la présence de fissures affectant la structure inspectée.

Chapitre 3

Rotors fissurés : Exploration numérique de quelques modèles simples

Sommaire

3.1	Présentation	67
3.2	Rappel sur les schémas d'intégration numérique utilisés	67
3.2.1	Le schéma de Newmark	68
3.2.2	La méthode d'intégration numérique α de Hilbert, Huygues et Taylor (HHT)	69
3.2.3	Les méthodes de Runge-Kutta	70
3.3	Discrétisation des signaux	71
3.3.1	Problème d'échantillonnage	71
3.3.2	Transformée de Fourier tronquée ou Discrète (TFD)	72
3.3.3	Transformée de Fourier rapide : FFT	73
3.4	Système dynamique à deux paramètres	74
3.4.1	Description	74
3.4.2	Loi de comportement de la section fissurée	75
3.4.3	Les équations dynamiques du système	76
3.4.4	Cas d'un rotor sans fissures	77
3.4.5	Etude de rotors en présence de fissures	81
3.4.6	Baisse de la vitesse critique due à la présence de fissures	83
3.4.7	Forme des orbites et des diagrammes de phase en présence de fissures	85
3.5	Etude de la vibration d'un rotor fissuré en flexion	86

3.5.1	Prise en compte des effets d'amortissement	90
3.5.2	Présentation de quelques résultats	90
3.5.3	Prise en compte des effets de cisaillement	93
3.6	Construction d'un élément fini de poutre fissuré	94
3.6.1	Etude du comportement vibratoire d'un rotor fissuré en flexion . .	101
3.7	Conclusions	103

3.1 Présentation

Le caractère exceptionnel des phénomènes de fissuration des rotors rend difficile l'évaluation de la fiabilité des algorithmes développés spécifiquement pour leur détection. Les méthodes de modélisation numérique constituent alors une alternative intéressante au retour d'expérience car elles permettent d'étudier, pour différentes configurations, l'impact d'une fissure sur la réponse vibratoire d'une ligne d'arbre. Ces méthodes permettent également d'examiner les effets des divers paramètres mis en jeu (profondeur de la fissure, vitesse de rotation de l'arbre, ...) et de vérifier la pertinence des descripteurs utilisés par les systèmes de surveillance.

Ce chapitre est consacré à l'exploration par voie numérique de la réponse vibratoire de quelques modèles simples de rotors fissurés. On commence par un bref rappel sur les méthodes d'intégration numérique utilisées pour la résolution des systèmes dynamiques à étudier. Par la suite, on évoque le problème d'échantillonnage et la technique de transformée de Fourier rapide puisque l'ensemble de résultats numériques à post-traiter se présente sous forme de signaux discrets.

Le premier système dynamique étudié dans ce chapitre est un système à deux paramètres : il s'agit de deux barres rigides de même géométrie connectées par un ressort non-linéaire dont la loi de comportement est de nature mathématique proche de celle d'une section de poutre fissurée en flexion bi-axée. Quelques aspects liés à la présence de la fissure sont alors mis en évidence.

Ensuite, afin d'approfondir nos investigations, on considère une modélisation par éléments finis d'un exemple de rotor dont une section est affectée de fissuration. Deux approches sont alors examinées :

- dans la première, les parties saines sont représentées par des éléments finis de type poutre de Timoshenko. Ces éléments sont reliés par un élément nodal (longueur nulle) dont la loi de comportement est celle d'une section de poutre fissurée telle que présentée dans le chapitre précédent. Les effets du cisaillement sont également étudiés.
- La seconde approche consiste à construire la matrice de rigidité d'un élément fini de poutre fissuré et de l'assembler avec celles des éléments sains comme dans le cas linéaire.

Le système dynamique obtenu par chacune de ces approches est intégré numériquement afin de voir les effets de la présence de la fissure sur la réponse vibratoire et d'exhiber quelques paramètres pouvant favoriser sa détection.

3.2 Rappel sur les schémas d'intégration numérique utilisés

Deux approches sont possibles pour résoudre les équations de la dynamique des structures : la **superposition modale** et l'**intégration temporelle directe**. La superposition modale est basée sur les résultats de l'analyse linéaire modale et consiste à exprimer la réponse dynamique sous forme de série de modes propres. L'efficacité de la méthode [59] est bonne pour autant que

les modes fondamentaux soient dominants dans la réponse. En revanche, dans le cas où le contenu fréquentiel de l'excitation est tel qu'un grand nombre de modes doivent être pris en compte afin d'assurer une bonne convergence, la superposition modale est avantageusement remplacée par les méthodes d'intégration directe.

Contrairement aux méthodes de superposition modale, les méthodes d'intégration directe ne sont pas limitées au cas des systèmes linéaires et peuvent aisément prendre en compte les composantes de fréquence élevée dans la réponse. Toutefois, elles ne peuvent être utilisées de manière aveugle. Leurs paramètres doivent être ajustés en fonction de la précision et de la stabilité requises et de manière à contrôler l'amortissement numérique de la réponse.

En dynamique linéaire, l'utilisation de schémas d'intégration en temps explicites et implicites est très répandue. Les premiers, tels que celui de Runge-Kutta d'ordre 4, adaptés à la résolution des problèmes à basses fréquences, découplent les inconnues du problème discret, mais nécessitent un contrôle du pas de temps pour éviter l'explosion de la solution numérique. Ils sont, de ce fait, conditionnellement stables. Les schémas implicites, telles que la famille de Newmark, nécessitent une résolution plus coûteuse parce qu'ils conduisent à un couplage des inconnues du problème. Ils sont adaptés aux problèmes faisant intervenir des hautes fréquences car ils sont inconditionnellement stables.

En dynamique non-linéaire, les mêmes notions sont également utilisées moyennant quelques précautions [17]. Par exemple, les schémas explicites ne sont pas bien adaptés aux problèmes dynamiques avec des comportements élastoplastiques des matériaux constitutants [123]. Les schémas implicites sont plus adaptés à ce genre de problème avec des choix de pas de temps relativement petits.

Dans ce qui suit, on présentera brièvement trois méthodes d'intégration temporelle différentes qui ont été utilisées pour l'exploration numérique de quelques modèles de rotors fissurés. Les deux premières appartiennent à la famille de Newmark, la dernière est celle de Runge-Kutta d'ordre 4.

3.2.1 Le schéma de Newmark

C'est une méthode d'intégration à un pas de temps (ici h). Dans le cas d'un système dynamique régi par l'équation (3.1), la procédure de calcul associée à la méthode d'intégration temporelle directe de Newmark est résumée par l'organigramme de la figure 3.1.

$$\mathcal{M}\ddot{r}(t) + \mathcal{D}\dot{r}(t) + \mathcal{K}r(t) = F \quad (3.1)$$

\mathcal{M} étant la matrice de masse, \mathcal{D} la matrice des amortissements visqueux et \mathcal{K} la matrice de rigidité. Si $\beta \geq \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2$, le schéma est inconditionnellement stable pour toute valeur de $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Le choix de $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ correspond à adopter une valeur moyenne de l'accélération sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Ce choix fournit l'opérateur d'intégration inconditionnellement stable de précision maximale.

On peut modifier le schéma de l'accélération moyenne pour y introduire de l'amortissement numérique en choisissant β et γ de telle sorte que l'on évolue sur la frontière du domaine de stabilité

inconditionnelle, soit

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha \text{ et } \beta = \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \text{ avec } \alpha \geq 0$$

Il en résulte toutefois une détérioration importante de la précision de la méthode [59].

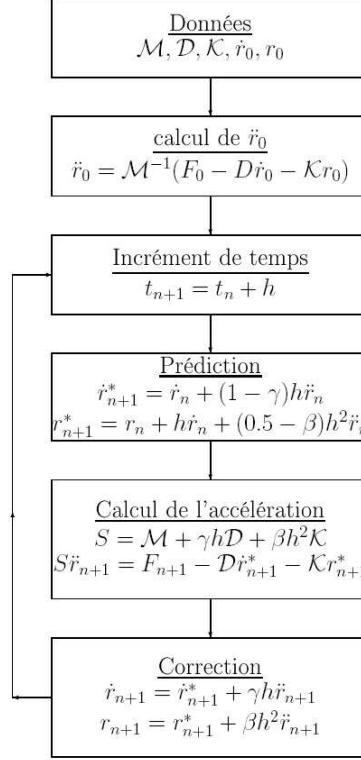


FIG. 3.1: *Algorithme d'intégration directe de Newmark*

3.2.2 La méthode d'intégration numérique α de Hilbert, Huygues et Taylor (HHT)

Hilbert, Huygues et Taylor [69] ont proposé une façon élégante d'introduire de l'amortissement dans la méthode de Newmark sans dégrader la précision. On considère le système d'équations du mouvement

$$\mathcal{M}\ddot{q} + \mathcal{D}\dot{q} + \mathcal{K}q = \mathcal{F} \quad (3.2)$$

La méthode consiste à appliquer les formules de Newmark

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 - \gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \quad (3.3)$$

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + h^2(0.5 - \beta)\ddot{q}_n + h^2\beta\ddot{q}_{n+1} \quad (3.4)$$

à l'équation temporelle discrète modifiée en pondérant les forces élastiques et les forces externes sur l'intervalle de temps.

Si l'on note

$$f(q, \dot{q}) = \mathcal{D}\dot{q} + \mathcal{K}q \quad (3.5)$$

les forces internes du système, le système d'équations du mouvement prend la forme plus générale

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\ddot{q}_{n+1} &+ (1 - \alpha)f(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) + \alpha f(q_n, \dot{q}_n) \\ &= (1 - \alpha)g_e(q_{n+1}, t) + \alpha g_e(q_n, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

qui, par ailleurs, reste d'application dans le cas non-linéaire. g_e est un vecteur décrivant l'action de la charge extérieure sur le système. Évidemment, si $\alpha = 0$, la méthode HHT se ramène au schéma de Newmark. Si les paramètres sont choisis tels que $\alpha \in [0, \frac{1}{3}]$, $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$, $\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2$, il en résulte un schéma inconditionnellement stable du second ordre. Sa mise en œuvre est similaire à celle de l'algorithme de l'accélération moyenne de Newmark.

L'algorithme HHT constitue un excellent choix lorsqu'il s'agit de recourir à un algorithme implicite inconditionnellement stable, donnant lieu à une dissipation numérique importante dans le domaine des hautes fréquences mais conservant la propriété de précision maximale de la méthode de l'accélération moyenne pratiquement intacte dans le domaine des basses fréquences.

L'utilisation de cet algorithme a été recommandée par Géradin et al. [58, 59] lorsque le système est soumis à des contraintes entre degrés de liberté et en régime non-linéaire.

3.2.3 Les méthodes de Runge-Kutta

Ce sont des méthodes à un pas de temps qui consistent à résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (3.7)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = y_0 \quad (3.8)$$

où $y \in \mathbb{R}^M$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M$ et $t \in [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$. Une méthode de Runge-Kutta permet de calculer une solution numérique de (3.7), $y_n \approx y(t_n)$ avec $t_n = t_0 + nh$ et h désignant le pas de temps. La méthode de Runge-Kutta la plus simple est celle d'*Euler avant* qui est une méthode explicite reliant y_{n+1} à y_n par

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (3.9)$$

Cette méthode conduit à une seule évaluation de la fonction f par pas de temps et est simple à mettre en œuvre, mais produit une réponse d'amplitude croissante en raison de son amortissement numérique négatif [59]. Elle est par conséquent imprécise et numériquement instable. Une autre variante de la méthode de Runge-Kutta est celle d'ordre 2, elle conduit à évaluer deux fois la fonction f par pas de temps

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 \end{aligned}$$

L'erreur est alors $O(h^3)$.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est la variante la plus utilisée de la méthode de Runge-Kutta. Elle conduit à évaluer 4 fois la fonction f sur l'intervalle d'intégration $[t_n, t_{n+1}]$:

1. $k_1 = hf(t_n, y_n)$ avec $y_n = f(x_n)$
2. $k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$
3. $k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$
4. $k_4 = hf(t_n + h, y_n + \frac{k_2}{3})$

par suite, la solution à t_{n+1} est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

L'erreur est alors $O(h^5)$.

3.3 Discrétisation des signaux

L'évolution des techniques, notamment le rapide développement des moyens et des méthodes informatiques, fait que, de nos jours, la mesure d'un signal $x(t)$ - variable réelle dépendant continûment du paramètre t - est effectuée chaque fois par *échantillonnage*. Par suite, l'expérience fournit généralement une suite discrète de nombres réels $x_n (n \in \mathbb{Z})$ mesurés aux instants t_n . Cette suite de nombres est nécessairement finie : elle comporte n valeurs prélevées toutes les T_e secondes pour un temps total de mesure $t_{max} = nT_e$. Il est clair que la fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$ doit être suffisamment élevée si l'on ne veut pas perdre trop d'information sur le signal original et que cette fréquence est liée au "contenu fréquentiel" du signal à échantillonner [20, 19, 55]. Ce principe est d'ailleurs bien connu par les expérimentateurs lors du relevé d'une courbe point par point : là où le signal varie rapidement (présence de fréquences élevées), il est indispensable de prendre "beaucoup" de points x_n (en réalité il serait préférable de parler d'une densité élevée de points), tandis que là où le signal varie peu (présence de fréquences basses) on peut en relever bien moins.

3.3.1 Problème d'échantillonnage

Soit un signal $x(t)$ de transformée de Fourier $X(f)$. Formons :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X(f + \frac{m}{T_e}) \quad (3.10)$$

$\tilde{X}(f)$ est une fonction périodique de période $\frac{1}{T_e}$ (si elle existe). Elle se met donc sous la forme :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{-2i\pi n T_e f} \quad (3.11)$$

avec

$$a_n = \int_0^{1/T_e} \tilde{X}(f) e^{2i\pi n T_e f} df \quad (3.12)$$

En remplaçant $\tilde{X}(f)$ par son expression (3.10), on a :

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi n T_e f} df = T_e x(n T_e) \quad (3.13)$$

d'où :

$$\tilde{X}(f) = T_e \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n T_e) e^{-2i\pi n T_e f} \quad (3.14)$$

$\tilde{X}(f)$ peut donc être considérée comme la transformée de Fourier de $x(t)$ discrétisée avec la période T_e . Certains auteurs [20] l'appellent Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD).

On peut distinguer deux cas :

1. Si $X(f) = 0$ pour $|f| > \frac{1}{2T_e}$
 Dans l'intervalle $[-\frac{1}{2T_e}, +\frac{1}{2T_e}]$, $\tilde{X}(f)$ coïncide avec $X(f)$. Dans l'intervalle choisi du fait de la discrétisation, le contenu fréquentiel du signal est bien restitué.
2. Si $X(f) \neq 0$ pour $|f| > \frac{1}{2T_e}$
 Dans l'intervalle $[-\frac{1}{2T_e}, +\frac{1}{2T_e}]$, $\tilde{X}(f)$ ne coïncide pas avec $X(f)$. Il y a repliement de spectre. Pour un signal réel, avoir du repliement signifie que les fréquences situées au-delà de la fréquence $\frac{1}{2T_e}$ sont "ramenées" dans la bande $[-\frac{1}{2T_e}, +\frac{1}{2T_e}]$. Ce phénomène est nuisible car il modifie le contenu fréquentiel du signal discrétisé par rapport au signal réel.

L'opération d'échantillonnage d'un signal réel à la fréquence F_e doit être précédée d'un filtrage anti-repliement dans la bande $[-\frac{1}{2T_e}, +\frac{1}{2T_e}]$. C'est le théorème de *Shannon*.

En pratique on est confronté à l'évaluation de la TFTD sur calculateur numérique. Or celle-ci s'avère irréalisable, ne serait-ce qu'en raison du fait que la fréquence est réelle. Cela nous conduit à introduire la transformée de Fourier discrète (TFD).

3.3.2 Transformée de Fourier tronquée ou Discrète (TFD)

Dans la pratique, on utilise un nombre fini $(2N+1)$ de valeurs discrètes du signal $x(t)$ à manipuler afin d'en extraire des informations jugées pertinentes. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ revient alors à calculer une transformée de Fourier tronquée :

$$X_T(f) = \int_{-T_{max}/2}^{+T_{max}/2} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \text{ avec } T_{max} = 2NT_e \quad (3.15)$$

X_T est la transformée de Fourier du produit de $x(t)$ et d'une fonction créneau dont la transformée de Fourier est :

$$\frac{1}{\pi f} \sin(\pi T_{max} f)$$

X_T est donc donnée par le produit de convolution :

$$X_T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f_0) \frac{\sin(\pi T_{max}(f - f_0))}{f - f_0} df_0$$

Ce qui montre que $X_T(f)$ est un lissage de $X(f)$ avec un pas en fréquence caractéristique de $\Delta f = \frac{1}{T_{max}}$. En d'autres termes, on ne pourra observer sur $X_T(f)$ de phénomène correspondant à un écart de fréquence inférieur à $\frac{1}{T_{max}}$. Au lieu de considérer le signal $x(t)$ tronqué, on peut construire

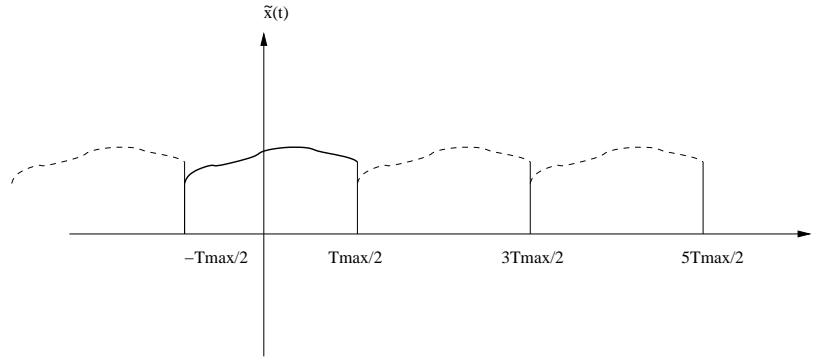


FIG. 3.2: Construction d'un signal de période T_{max} et de durée infinie à partir de $x(t)$ de durée T_{max}

un signal $\tilde{x}(t)$ de période T_{max} à partir de $x(t)$ comme l'indique la figure 3.2. La transformée de Fourier $\tilde{X}(f)$ de $\tilde{x}(t)$ est une distribution qui peut être considérée comme l'échantillonnage de $X_T(f)$ avec le pas $\frac{1}{T_{max}}$ [55]. Ceci apparaît de façon évidente en écrivant $\tilde{x}(t)$ sous la forme de la série de Fourier :

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T_{max}} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X_T\left(\frac{m}{T_{max}}\right) e^{\frac{2i\pi m t}{T_{max}}} \quad (3.16)$$

Finalement, partant du signal $x(t)$ préalablement filtré, échantillonné à la fréquence de numérisation $F_e = \frac{1}{T_e}$, on obtient les valeurs échantillonnées ($\Delta f = \frac{1}{T_{max}}$) de sa transformée de Fourier tronquée $X_T(f)$ à l'aide de la formule :

$$X_T\left(\frac{m}{T_{max}}\right) = T_e \sum_{n=-N+1}^{n=N} x(nT_e) e^{-\frac{i\pi n m}{N}} \quad (3.17)$$

avec $N = \frac{T_{max}}{2T_e}$ et $-N < m \leq N$.

3.3.3 Transformée de Fourier rapide : FFT

La transformée de Fourier rapide (en anglais Fast Fourier Transform (FFT)), publiée pour la première fois en 1965 par Cooley et Tukey [29], est une technique de calcul rapide de la TFD. On a naturellement intérêt à choisir N grand et T_e petit pour représenter aussi fidèlement que possible le signal $x(t)$. Avec $N = 500$, ce qui est relativement peu, il faut déjà calculer 1000 sommes dont chacune comporte 1000 termes ! De façon plus générale, on voit que la détermination des n composantes d'un spectre exige un nombre d'opérations (additions et multiplications) qui

est de l'ordre de n^2 . Cette croissance géométrique est un facteur limitatif très sévère, qui pendant longtemps, a considérablement restreint l'usage de la transformée de Fourier. Toutefois, lorsque n est une puissance de 2, l'algorithme de la FFT, permet le calcul de la TFD et son gain en temps par rapport à un calcul direct est de l'ordre de $\frac{n}{\log_2(n)}$. Ainsi, pour $n = 2^{10} = 1024$, le gain est déjà d'un facteur 100 ! On voit la différence considérable de coût qui en résulte [20]. C'est en fait grâce à cette économie d'échelle fantastique que l'analyse par transformée de Fourier fait aujourd'hui figure d'instrument de routine. Sous *MATLAB*®, la fonction *fft* met en œuvre l'algorithme de la transformée de Fourier rapide. Elle est utilisée tout le long de ce travail pour le calcul des différents spectres à présenter.

3.4 Système dynamique à deux paramètres

3.4.1 Description

Le modèle à deux paramètres considéré, cf. figure 3.3, est composé de deux barres rigides identiques AG et GB, de section circulaire d'aire S , de longueurs respectives a et b et de masse répartie m . Elles sont liées en G par une liaison élastique non-linéaire travaillant en flexion tandis que les extrémités A et B sont des articulations fixes. La liaison en G est censée traduire une rigidité globale dans un rotor fissuré tournant. La rotation du rotor se traduit par une vitesse de rotation imposée Ω des barres autour de leur axe. Sous l'influence du poids propre et de cette rotation imposée, les petits mouvements du point G sont décrits par les petits déplacements $(U(t), V(t), 0)$ dans le système d'axes fixes $Oxyz$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de la structure, ses coordonnées vérifient alors :

$$\begin{cases} (x = \frac{z+a}{a}U, y = \frac{z+a}{b}V, z) \text{ si } M \in [GA] \\ (x = \frac{b-z}{b}U, y = \frac{b-z}{a}V, z) \text{ si } M \in [GB] \end{cases} \quad (3.18)$$

Les rotations autour de (Ox) et de (Oy) sont données, respectivement, par :

$$\theta_x = -\frac{\partial y}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{V}{a} \text{ si } M \in [GA] \\ \frac{V}{b} \text{ si } M \in [GB] \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_y = \frac{\partial x}{\partial z} = \begin{cases} \frac{U}{a} \text{ si } M \in [GA] \\ -\frac{U}{b} \text{ si } M \in [GB] \end{cases} \quad (3.19)$$

Les discontinuités de rotations en G sont définies, compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, par :

$$[\theta] = \begin{cases} [\theta]_x \\ [\theta]_y \end{cases} = \begin{cases} \theta_x(0^+) - \theta_x(0^-) = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})V = [\theta_x] \\ \theta_y(0^+) - \theta_y(0^-) = -(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})U = [\theta_y] \end{cases} \quad (3.20)$$

On vérifie en particulier que :

$$[\theta] \perp oG \quad (3.21)$$

La liaison en G représente une section fissurée possédant une énergie élastique non-linéaire $W_{elas} = W([\theta]_x, [\theta]_y)$.

Pour déduire l'expression de l'énergie élastique du système qui se réduit ici à l'énergie de la liaison élastique W , on introduit l'angle γ

$$\gamma = (\mathbf{Ox}, [\theta]) \in [0, 2\pi] \quad (3.22)$$

qui est défini lorsque $[\theta] \neq \mathbf{0}$. Dans ce cas $\tan(\gamma) = -\frac{U}{V}$, ce qui donne $\gamma = -\arctan(\frac{U}{V}) + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Pour $\gamma \in [0, 2\pi]$, on a $n \in \{0, 1, 2\}$. L'orientation de la fissure est définie par une direction

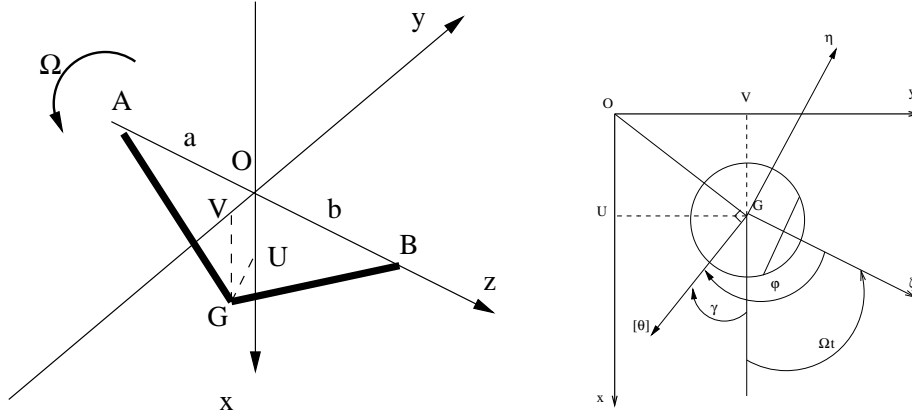


FIG. 3.3: Modèle à deux paramètres. (Oxy) repère fixe et $(O\zeta\eta)$ repère tournant

matérielle $\mathbf{O}\zeta$ telle que $(\mathbf{Ox}, \mathbf{O}\zeta) = \Omega t$ compte tenu de la rotation imposée du rotor.

3.4.2 Loi de comportement de la section fissurée

Pour admettre que l'énergie s'écrit sous la forme $W = \frac{1}{2}k(\varphi)([\theta]_x^2 + [\theta]_y^2)$ dans laquelle $k(\varphi)$ représente une rigidité directionnelle, fonction périodique de φ de période 2π , on introduit l'angle

$$\varphi = (\mathbf{O}\zeta, [\theta]) = (\mathbf{O}\zeta, \mathbf{Ox}) + (\mathbf{Ox}, [\theta]) = \gamma - \Omega t \in [0, 2\pi] \quad \text{modulo } 2\pi \quad (3.23)$$

Les moments associés aux rotations à chaque instant t sont alors

$$M_x = \frac{\partial W}{\partial [\theta]_x} \quad \text{et} \quad M_y = \frac{\partial W}{\partial [\theta]_y}$$

On choisit dans cet exemple à deux degrés de liberté une loi de comportement de nature mathématique proche de celle d'un élément de section fissurée en flexion bi-axée. Cela signifie que la loi de comportement suivante est adoptée

$$\begin{pmatrix} M_\zeta \\ M_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_\zeta \\ [\theta]_\eta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

en vue d'explorer les difficultés de calcul.

Dans le repère fixe $(Oxyz)$, cette loi de comportement s'écrit

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_x \\ [\theta]_y \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.4.3 Les équations dynamiques du système

Il s'agit d'un système décrit par deux paramètres $\mathbf{q} = (U, V)$. Les équations de mouvement sont données par le principe des puissances virtuelles [90] :

$$\delta W_I + \delta W_J + \delta W_E = 0 \quad \text{pour tout mouvement virtuel } \delta \mathbf{q} \quad (3.26)$$

où W_I , W_J et W_E désignent, respectivement :

- la puissance virtuelle des efforts intérieurs,
- la puissance virtuelle des efforts d'inertie,
- et la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

Ainsi,

$$\delta W_I = -\delta W = -\frac{\partial W}{\partial [\theta]_x} \delta [\theta]_x - \frac{\partial W}{\partial [\theta]_y} \delta [\theta]_y, \quad (3.27)$$

$$\delta W_E = \frac{mg(a+b)}{2} \delta U \quad (3.28)$$

et

$$\delta W_J = J_i \delta q_i \text{ avec } J_i = \frac{\partial C}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial C}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (3.29)$$

L'énergie cinétique C de la structure est composée de l'énergie cinétique de translation du centre de gravité et du mouvement de rotation autour des axes principaux d'inertie de la section. Soit ,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\rho S}{2} \left(\int_{-a}^0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dz + \int_0^b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dz \right) \\ &+ \frac{\rho I}{2} \left(\int_{-a}^0 \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 dz + \int_0^b \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 dz \right) \\ &+ 2\rho I \Omega \left(\int_{-a}^0 \dot{\theta}_x \theta_y dz + \int_0^b \dot{\theta}_x \theta_y dz \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

où ρ désigne la masse par unité de volume et I le moment d'inertie quadratique : $I = \frac{\pi R^4}{4}$. Le calcul des intégrales de l'équation (3.30) conduit à :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\rho S}{2} \frac{(a+b)}{3} (\dot{U}^2 + \dot{V}^2) \\ &+ \frac{\rho I}{2} \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (\dot{U}^2 + \dot{V}^2) + 2(a+b)\Omega^2 \right) \\ &- 2\rho I \Omega \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) U\dot{V} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

En remarquant que

$$\delta[\theta]_x = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\delta V \text{ et } \delta[\theta]_y = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\delta U$$

les équations dynamiques du système s'écrivent

$$\begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où

$$M_0 = \frac{\rho S}{3}(a+b) + \frac{\rho I}{\mathfrak{L}}, \frac{1}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, c = 2\frac{\rho I}{\mathfrak{L}} \text{ et } m_2 = m\frac{a+b}{2}$$

Dans le système (3.32), la première matrice désigne la matrice de masse, la seconde celle des effets gyroscopiques et la dernière celle de rigidité.

3.4.4 Cas d'un rotor sans fissures

Dans ce cas, la rigidité de la structure est constante, on a : $k'(\varphi) = 0$ et $k(\varphi) = k_0$. Le problème se ramène à la résolution d'un système de deux équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants. Les solutions du système sans second membre sont de la forme [78] :

$$U = U_0 e^{rt} \text{ et } V = V_0 e^{rt} \quad (3.34)$$

en remplaçant dans (3.33), on obtient :

$$\begin{pmatrix} M_0 r^2 + \frac{k_0}{\mathfrak{L}^2} & c\Omega r \\ -c\Omega r & M_0 r^2 + \frac{k_0}{\mathfrak{L}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

L'équation caractéristique est, alors, donnée par :

$$M_0 r^4 + \left(2\frac{k_0}{\mathfrak{L}^2} M_0 + c^2 \Omega^2\right) r^2 + \left(\frac{k_0}{\mathfrak{L}^2}\right)^2 = 0 \quad (3.36)$$

A l'arrêt ($\Omega = 0$), les racines sont données par :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = i^2 w_{10}^2 = i^2 w_{20}^2 = -\frac{k_0}{\mathfrak{L}^2 M_0}$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines sont r_1 et r_2 et les pulsations propres correspondantes w_1 et w_2 . Il vient :

$$\begin{cases} r_1^2 = i^2 w_1^2 = - \left(w_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2M_0^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4M_0^2 w_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right) \\ r_2^2 = i^2 w_2^2 = - \left(w_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2M_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4M_0^2 w_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right) \end{cases} \quad (3.37)$$

Notons bien que $w_1 < w_{10} = w_{20} < w_2$.

r_1 et r_2 sont des quantités imaginaires et la solution générale des équations du mouvement reste donc limité dans le temps : **le rotor est stable**. L'expression de la solution générale est de la forme :

$$\begin{cases} U = A_1 e^{i w_1 t} + B_1 e^{-i w_1 t} + A_2 e^{i w_2 t} + B_2 e^{-i w_2 t} \\ V = i A_1 e^{i w_1 t} - i B_1 e^{-i w_1 t} - i A_2 e^{i w_2 t} + i B_2 e^{-i w_2 t} \end{cases} \quad (3.38)$$

Les constantes A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont déterminées par les conditions initiales.

Considérons, par exemple, un ensemble de conditions initiales montrant uniquement la fréquence w_1 . Soit, à $t = 0$:

$$U = U_{10}, V = 0, \dot{U} = 0 \text{ et } \dot{V} = -w_1 U_{10} \quad (3.39)$$

cela conduit au système d'équations

$$\begin{cases} A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = U_{10} \\ A_1 - B_1 - A_2 + B_2 = 0 \\ A_1 w_1 - B_1 w_1 + A_2 w_2 - B_2 w_2 = 0 \\ -A_1 w_1 - B_1 w_1 + A_2 w_2 + B_2 w_2 = -w_1 U_{10} \end{cases}$$

dont la solution est :

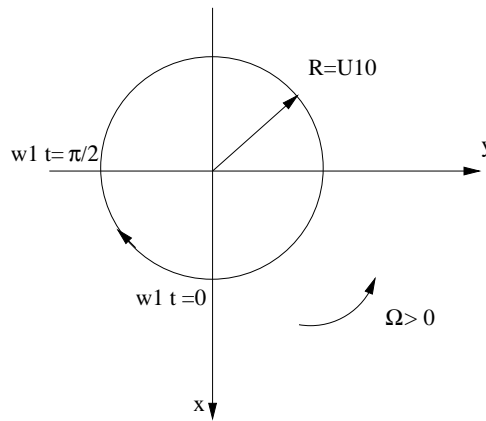


FIG. 3.4: *Orbite du rotor : précession inverse*

$$A_2 = B_2 = 0 \text{ et } A_1 = B_1 = \frac{U_{10}}{2}$$

Finalement, le mouvement est décrit par :

$$\begin{cases} U = U_{10}\cos(w_1 t) \\ V = -U_{10}\sin(w_1 t) \end{cases} \quad (3.40)$$

Le point G décrit le cercle de centre O et de rayon U_{10} , cf. figure 3.4. L'ensemble des points de la structure décrivent des cercles. Avec l'ensemble des conditions initiales choisies, l'orbite est décrite, cf. figure 3.4, dans un sens opposé au sens de rotation Ω ; le rotor est dans la situation de **précession inverse**.

Application numérique On considère un rotor avec les données suivantes :

$$a = b = 2m, D = 0.2m, w_{10} = 60Hz = (2\pi 60 rad/s), \Omega = 1.33w_{10} \text{ et } U_{10} = 0.1m$$

ce qui donne

$$w_1 = 59.85Hz, w_2 = 60.15Hz$$

En utilisant la méthode d'intégration de Newmark, on obtient l'orbite et le spectre d'amplitude conformément à l'étude théorique élaborée ci-dessus, cf. figure 3.5.

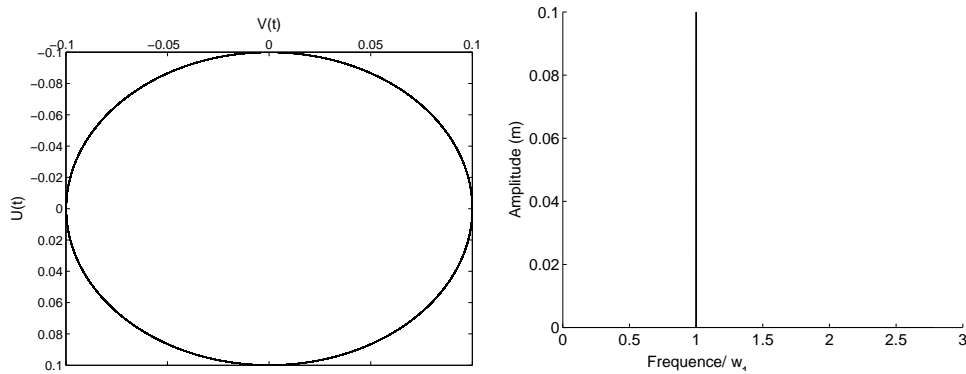


FIG. 3.5: *Orbite et spectre d'amplitude du rotor : précession inverse*

Considérons maintenant un ensemble de conditions initiales montrant uniquement la fréquence w_2 . A $t = 0$:

$$U = 0, V = V_{10}, \dot{U} = -w_2 V_{10} \text{ et } \dot{V} = 0 \quad (3.41)$$

cela conduit au système d'équations

$$\begin{cases} A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = 0 \\ A_1 - B_1 - A_2 + B_2 = -iV_{10} \\ A_1 w_1 - B_1 w_1 + A_2 w_2 - B_2 w_2 = iw_2 V_{10} \\ -A_1 w_1 - B_1 w_1 + A_2 w_2 + B_2 w_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est :

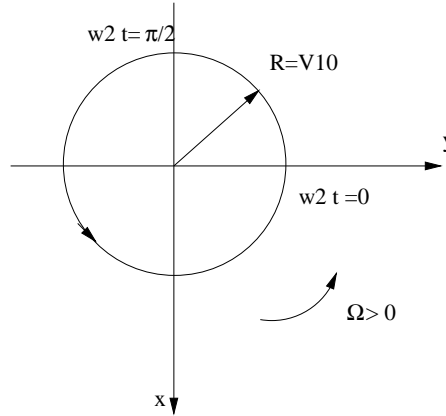


FIG. 3.6: *Orbite du rotor : précession directe*

$$A_1 = B_1 = 0 \text{ et } A_2 = -B_2 = i \frac{V_{10}}{2}$$

L'ensemble des points de la structure décrivent des cercles. Avec l'ensemble des conditions initiales choisies, l'orbite est décrite, cf. figure 3.6, dans le sens de rotation Ω ; le rotor est dans la situation de **précession directe**. Finalement, le mouvement est décrit par :

$$\begin{cases} U = -V_{10} \sin(w_2 t) \\ V = V_{10} \cos(w_2 t) \end{cases} \quad (3.42)$$

Le point G décrit le cercle de centre O et de rayon V_{10} , cf. figure 3.6.

Application numérique On considère un rotor avec les données suivantes :

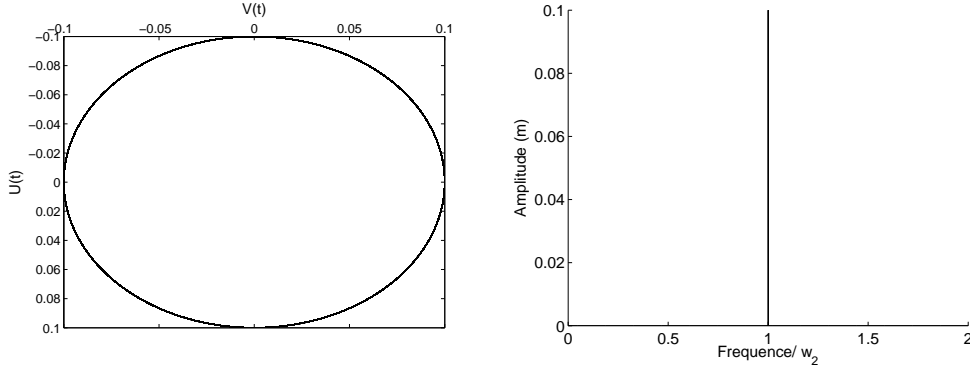
$$a = b = 2m, D = 0.2m, w_{10} = 60Hz = (2\pi 60 rad/s), \Omega = 1.33w_{10} \text{ et } V_{10} = 0.1m$$

ce qui donne

$$w_1 = 59.85Hz, w_2 = 60.15Hz$$

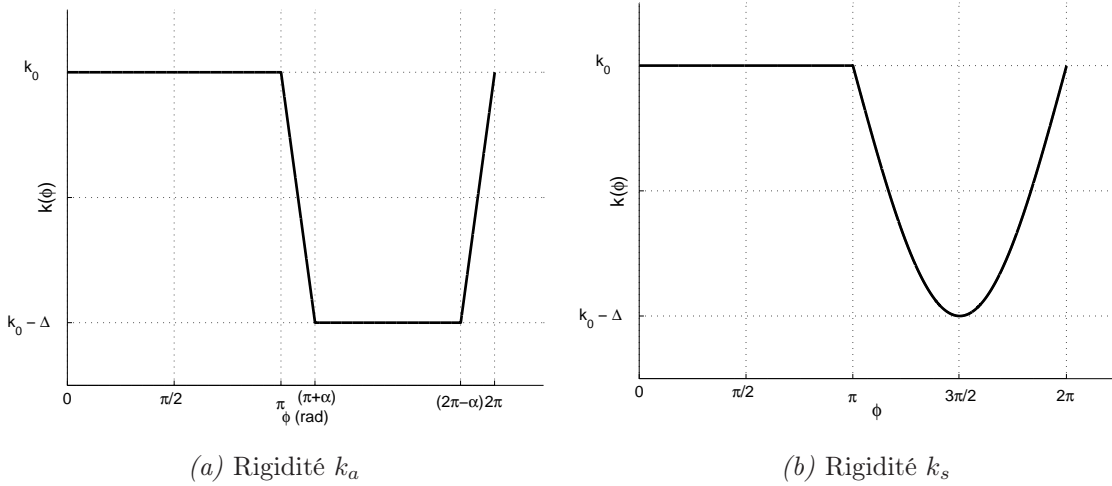
En utilisant la méthode d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4, on obtient l'orbite et le spectre d'amplitude conformément à l'étude théorique élaborée ci-dessus, cf. figure 3.7.

Les résultats retrouvés numériquement coïncident avec les solutions analytiques pour les deux cas de *précessions directe* et *inverse*. Ceci nous a permis de vérifier nos algorithmes de mise en œuvre des méthodes de Newmark et Runge-Kutta d'ordre 4 sur *MATLAB*®.

FIG. 3.7: *Orbite et spectre d'amplitude du rotor : précession directe*

3.4.5 Etude de rotors en présence de fissures

Pour l'étude d'un rotor comportant une fissure, on a considéré deux allures différentes de la variation périodique de la fonction rigidité $k(\varphi)$. k_0 désigne la rigidité globale de la structure en l'absence de fissures.

FIG. 3.8: *Allures considérées de $k(\varphi)$*

On appelle $\Delta_k = \frac{\Delta}{k_0}$, le paramètre adimensionnel qui mesure la perte de rigidité due à la présence de la fissure et $\xi = \frac{\Omega}{w_0}$ la fréquence d'excitation relative. $w_0 = \sqrt{\frac{k_0}{M_0 \mathfrak{L}^2}}$ est la pulsation propre de la structure non fissurée en repos ($\Omega = 0$). Dans la réalité, les systèmes conservatifs n'existent pas [55]. Il y a toujours des causes de dissipation d'énergie au cours du mouvement. Les rotors, couramment supportés par des paliers hydrauliques, sont amortis.

L'amortissement, qui peut être important est de type visqueux. En tenant compte de ces effets d'amortissement toujours présents, le système d'équations (3.32) devient

$$\begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & c\Omega \\ -c\Omega & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

où D désigne le terme d'amortissement externe équivalent dû à la dissipation au niveau des paliers étant donné que l'amortissement interne de l'arbre peut souvent être négligé [109]. On définit également l'amortissement réduit par

$$d = \frac{D}{2\sqrt{\frac{k_0 M_0}{\mathfrak{L}^2}}}$$

ainsi, l'amortissement visqueux est calculé comme dans le cas d'absence de fissures. L'hypothèse suivante est retenue tout le long de ce travail.

Hypothèse *Les effets de la présence de fissures sur la matrice de masse et celle des amortissements visqueux sont négligés.*

Des calculs numériques, utilisant des codes mis en œuvre sous *MATLAB*[®], ont été réalisés afin d'explorer les phénomènes dus à la présence de la fissure et de son mécanisme de respiration (ouverture-fermeture). Les schémas d'intégration numérique utilisés sont le schéma de Newmark (accélération moyenne) et celui de Runge-Kutta d'ordre 4. On vérifie que la résolution du système (3.43) par ces deux méthodes donne des résultats concordants, cf. figure 3.9.

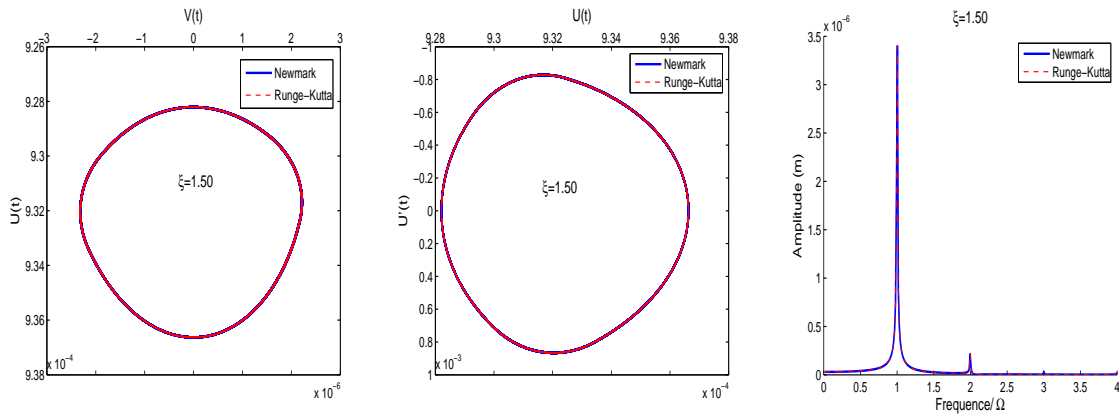


FIG. 3.9: Comparaison des schémas numériques : orbites, diagrammes de phases et spectres d'amplitude de $U(t)$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\Delta_k = 1\%$, $d = 5\%$

Pour une même diminution maximale de rigidité Δ_k , la courbe de rigidité k_s conduit à une structure plus souple que celle de rigidité k_a lorsque $\alpha > \frac{3\pi}{8}$, cependant quand α reste

inférieur à $\frac{3\pi}{8}$, la variation de la rigidité en k_a conduit à une structure nettement plus souple, cf. figure 3.10.

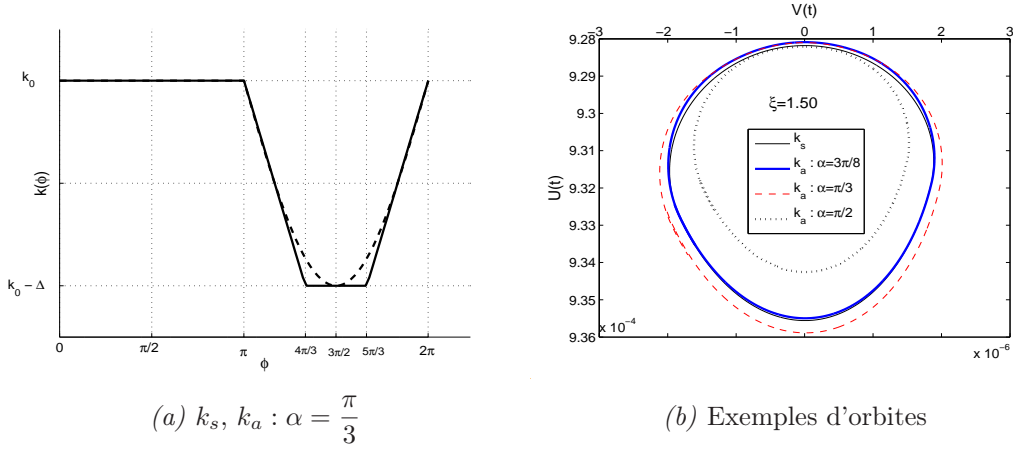


FIG. 3.10: Quelques orbites de comparaison des deux fonctions rigidité considérées

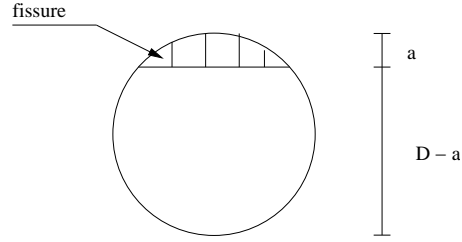
3.4.6 Baisse de la vitesse critique due à la présence de fissures

Les codes développés nous ont permis également d'étudier la baisse de la fréquence de résonance due à la présence de la fissure. En effet, l'apparition d'une fissure dans un élément de structure ou la propagation de fissures existantes conduit à son affaiblissement et, par conséquent, à une baisse des fréquences de résonance.

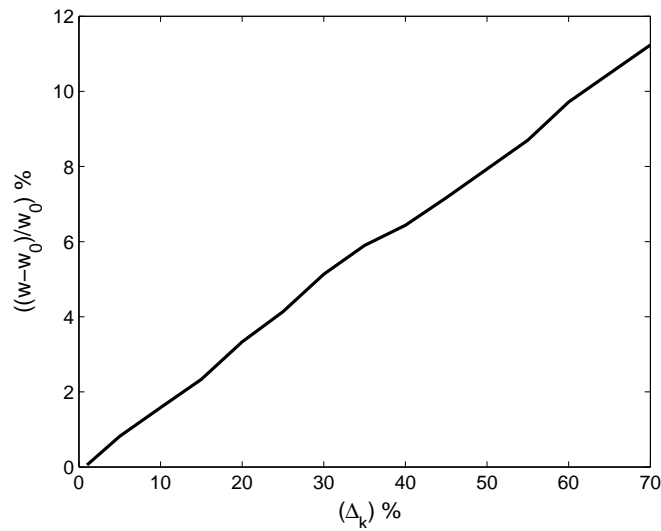
En pratique, les exploitants de machines tournantes se sont souvent basés sur la mesure de la baisse des fréquences de résonance pour la détection des fissures [44, 45]. C'est le paramètre le plus répandu parce que sa mesure se réduit à l'évaluation de la réponse vibratoire en un seul point de l'arbre.

L'examen de la réponse vibratoire du système dynamique de rotor fissuré à deux paramètres montre que pour des fissures peu profondes ($\Delta_k < 30\%$), la diminution en vitesse critique reste inférieure à 4%. Cette diminution ne dépasse pas les 12% pour des pertes en rigidité atteignant, pour une fissure totalement ouverte, les 70%, cf. figure 3.12. Ceci confirme les constatations de Dimarogonas [35, 36] qui a développé une technique de calcul de la première vitesse critique d'un arbre fissuré. En particulier, il a montré que sa diminution est, pour des fissures de faibles profondeurs, proportionnelle à $(\frac{a}{D})^2$ où a désigne la profondeur de la fissure à fond droit et D le diamètre de l'arbre, cf. figure 3.11. Pour une fissure telle que $\frac{a}{D} \approx 27\%$, la diminution (surestimée) de la vitesse critique est d'environ 5.6% d'après Dimarogonas [44].

L'objectif principal des exploitants de machines tournantes de grande taille telles que les turbines des centrales nucléaires, est de détecter la présence éventuelle de fissures avant qu'elles n'atteignent des profondeurs critiques pouvant conduire à des ruptures brutales de l'arbre.

FIG. 3.11: *Section fissurée*

Ils sont, ainsi, intéressés par la détection de fissures de profondeurs faibles [44]. D'autre part,

FIG. 3.12: *Baisse relative de la fréquence de résonance en fonction de la perte de rigidité*

le changement des fréquences de résonances (vitesses critiques) lors du fonctionnement de l'arbre peut être engendré par une augmentation de la température, un changement des conditions aux limites dû, par exemple, à l'apparition de jeux aux paliers [126].

Salawu [106] a résumé les principales tentatives de détection des anomalies dans les structures basées sur le glissement des fréquences de résonance. Il a rapporté qu'une anomalie ne peut être détectable que si elle engendre une variation des fréquences de résonance supérieure à 5%. Cependant, la seule mesure de ce paramètre reste insuffisante puisque à cause des conditions ambiantes, une variation supérieure à 5% a été enregistrée, par Aktan et al. [2], sur des ponts en béton et en acier durant une journée.

Ainsi, une surveillance des machines basée sur le glissement des fréquences de résonance ne peut être fiable surtout lorsqu'il s'agit de fissures de faible profondeur. D'autres paramètres doivent être exhibés afin de permettre un meilleur suivi de l'état des machines permettant de détecter tôt la présence d'éventuelles fissures.

3.4.7 Forme des orbites et des diagrammes de phase en présence de fissures

Dans cette section, on se propose d'examiner l'effet de la présence d'une fissure traduite par une variation périodique de la rigidité globale de la structure, sur la forme des orbites décrites par le rotor. On considère une variation périodique en k_a (affine par morceaux) de la fonction rigidité avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$, cf. figure 3.8(a).

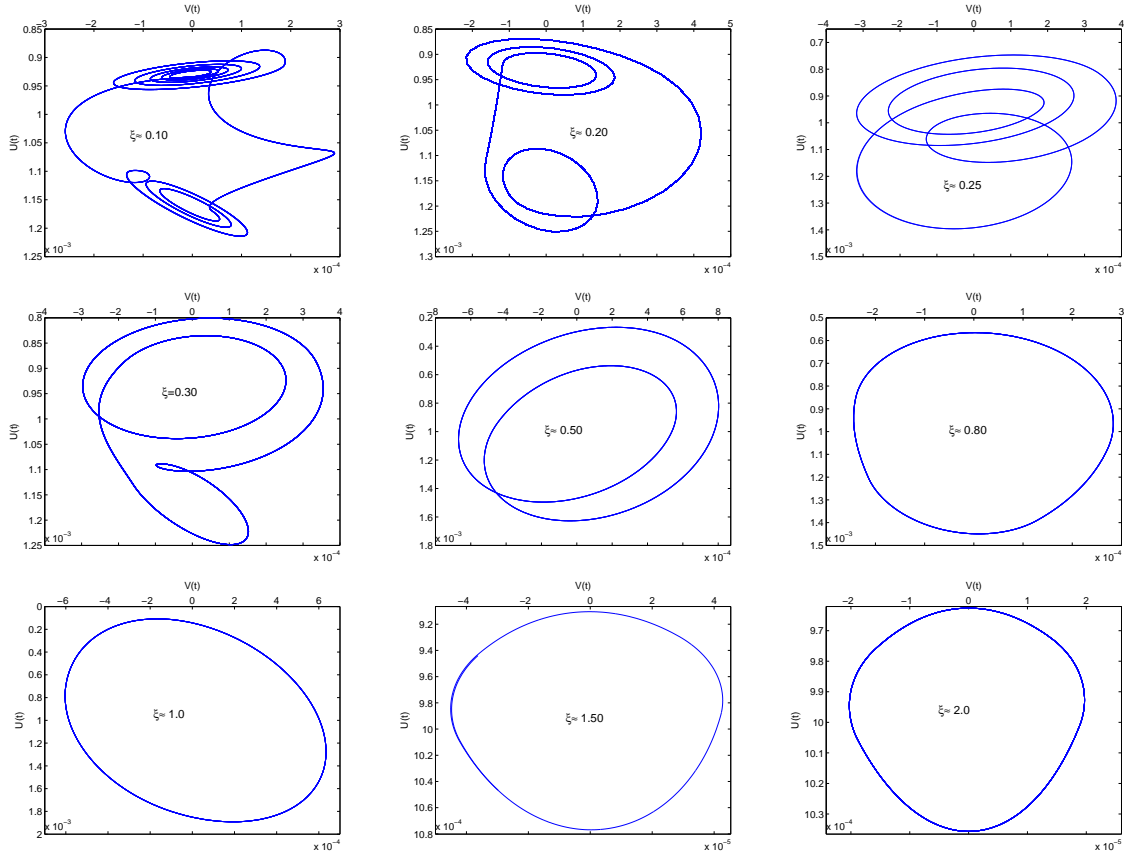


FIG. 3.13: Système à 2 ddl : Exemples d'orbites, $\Delta_k = 0.2$, $d = 5\%$

Lorsque la vitesse de rotation Ω , fréquence fondamentale d'excitation, est voisine d'un sous-multiple entier de la fréquence de résonance de la structure w , soit

$$\xi = \frac{\Omega}{w} \approx \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

l'orbite du rotor est formée de n boucles entrelacées. L'examen des spectres d'amplitude, cf. figure 3.15, montre qu'en ces points, le niveau vibratoire de l'harmonique d'ordre n atteint des valeurs élevées. Il s'agit du phénomène de résonance super-harmonique connu pour les systèmes dynamiques non-linéaires [89].

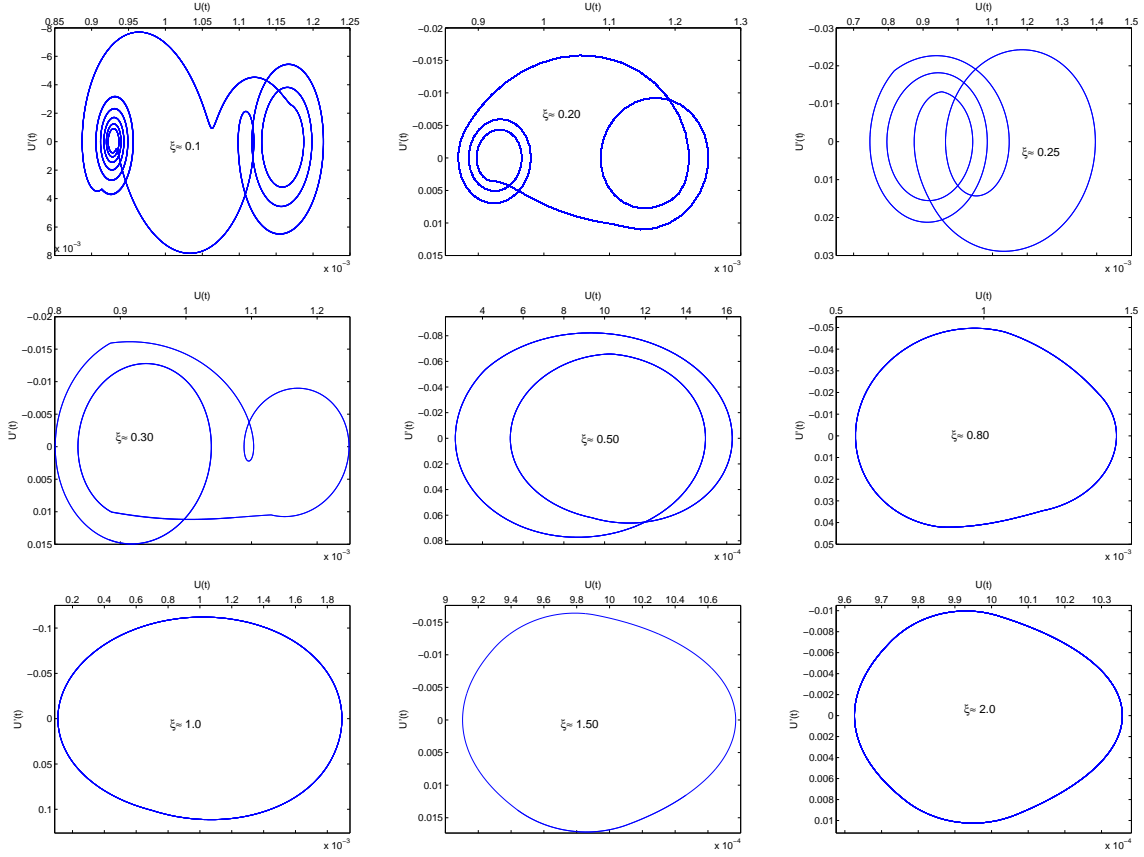


FIG. 3.14: *Système à 2 ddl : Exemples de diagrammes de phases, $\Delta_k = 0.2$, $d = 5\%$*

Ainsi, l'observation de changements de forme des orbites accompagnés de résonances superharmoniques au cours du démarrage ou de l'arrêt d'une machine tournante peut être un bon indicateur de présence de fissures.

3.5 Etude de la vibration d'un rotor fissuré en flexion

Cette section est relative à l'examen de la réponse vibratoire d'un rotor fissuré en rotation autour de son axe (Oz) à la vitesse Ω et soumis aux seuls effets de son poids propre.

La structure de masse répartie m est composée de quatre éléments de type poutre de Timoshenko identiques, de longueur $L = 1m$, de section circulaire constante S de diamètre $D = 0.2m$. Elle comporte, à mi-portée, une section affectée de fissuration. Le rotor, en rotation à la vitesse Ω autour de son axe, est simplement appuyé à ses deux extrémités, cf. figure 3.17. Les degrés de liberté de rotations du nœud 3 sont dédoublés pour permettre l'insertion de la loi de comportement de la section fissurée. Dans le repère tournant ($O\zeta\eta$),

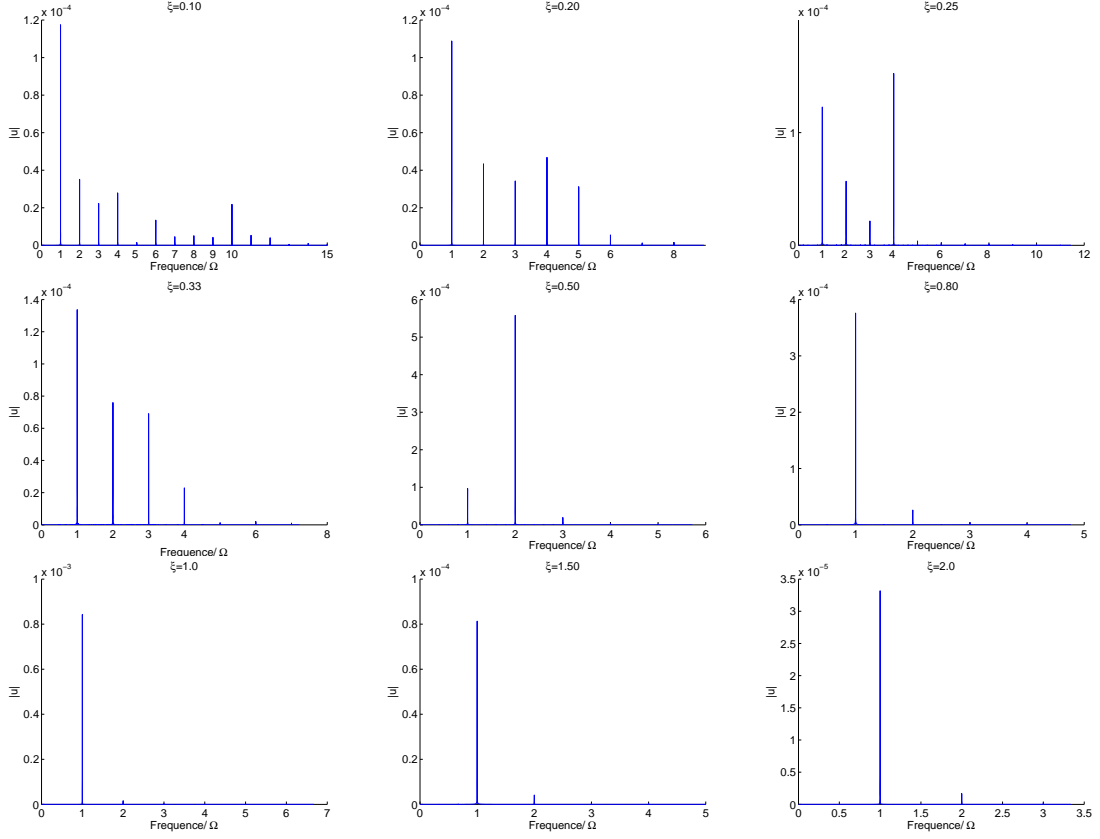


FIG. 3.15: *Système à 2 ddl : Exemples de spectres d'amplitude de $u(t)$, $\Delta_k = 0.2$, $d = 5\%$*

cette relation de comportement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} M_\zeta \\ M_\eta \end{pmatrix} = \frac{EI}{4D} \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_\zeta \\ [\theta]_\eta \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Le passage au repère absolu ($Oxyz$) conduit à

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \frac{EI}{4D} \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_x \\ [\theta]_y \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$[\theta]_x$ et $[\theta]_y$ sont les discontinuités de rotations au niveau de l'élément nodal représentant la section fissurée données par

$$[\theta]_x = \theta_x^{3+} - \theta_x^{3-} \text{ et } [\theta]_y = \theta_y^{3+} - \theta_y^{3-}$$

avec

$$\left\{ U, V, \theta_x^{3-}, \theta_y^{3-}, \theta_x^{3+}, \theta_y^{3+} \right\}$$

sont les ddl retenus pour le nœud 3 (élément nodal). Les exposants $^{3-}$ et $^{3+}$ indiquent les rotations à gauche et à droite de la section fissurée, respectivement. $I = \frac{\pi D^4}{64}$ est le moment quadratique de la section transversale, $k(\varphi)$ est la fonction de rigidité de la section fissurée déterminée par Andrieux et Varé [5] dans le cas de la flexion bi-axée d'un élément de poutre fissuré (voir paragraphe 2.8.1), $k'(\varphi) = \frac{\partial k(\varphi)}{\partial \varphi}$ et φ est l'angle défini par $\varphi = \text{atan}\left(\frac{[\theta]_\eta}{[\theta]_\zeta}\right)$.

Lorsque $\varphi < \pi$, la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure conduit à **pénaliser** les discontinuités de rotations en considérant

$$k(\varphi) = +\infty \text{ et } k'(\varphi) = 0 \quad (3.46)$$

En pratique, la condition de pénalisation (3.46) ne peut être appliquée aveuglement lorsque les conditions de chargement conduisent à une fissure totalement fermée. Les valeurs à attribuer à $k(\varphi)$, dans ces conditions, ne doivent pas conduire à une matrice de rigidité mal conditionnée dont l'inversion est source potentielle d'erreurs numériques. Ces valeurs très élevées de $k(\varphi)$ lorsque la fissure se ferme, conduisent à l'apparition de fréquences très élevées sans sens physique. Les méthodes d'intégration temporelle explicites ne sont pas adaptées à ce genre de problèmes. Leur utilisation nécessite des pas de temps très faibles et, par conséquent, des temps de calculs importants. L'utilisation des méthodes d'intégration implicites est, de ce fait, justifiée. Afin de filtrer les hautes fréquences dues à l'utilisation de la technique de pénalisation, de l'amortissement numérique doit être introduit proprement dans le schéma implicite considéré. La méthode HHT, utilisée dans ce qui suit, est très adaptée à la résolution des problèmes de ce type [69, 59].

Pour le cas d'une section circulaire comportant une fissure à fond droit de profondeur égale

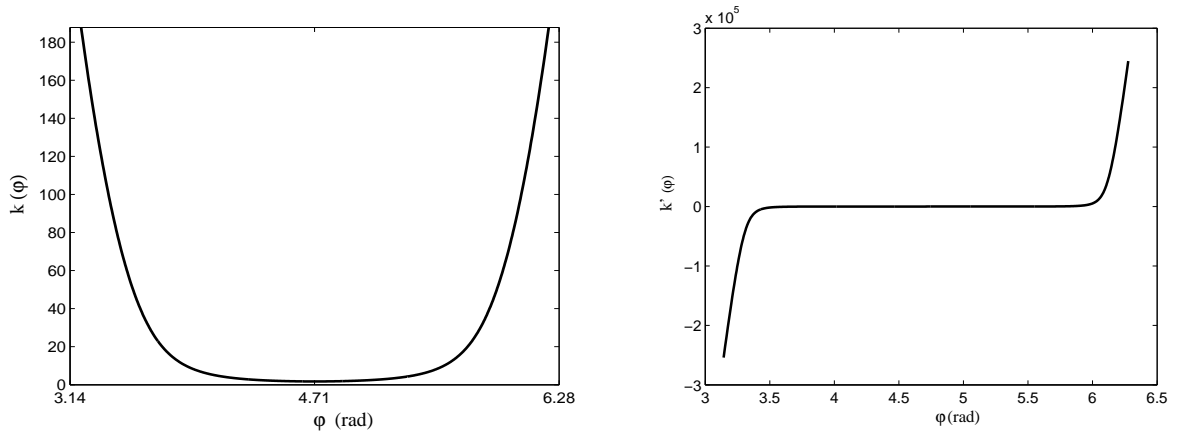


FIG. 3.16: Variation de la rigidité et de sa dérivée pour une fissure à fond droit : $\frac{a}{D} = 50\%$

à 50% du diamètre, les courbes de rigidité et de sa dérivée sont données par la figure 3.16.

Dans le cas de chargement considéré, les charges externes se réduisent aux effets du poids propre de la structure. La structure fléchit principalement dans le plan (xz) .

Les conditions de contact unilatéral sans frottement sur les lèvres de la fissure se traduisent par

$$[\theta]_\eta \leq 0$$

L'angle φ est défini par

$$\begin{aligned} \varphi &= (\mathbf{O\xi}, [\theta]) = (\mathbf{O\xi}, \mathbf{Ox}) + (\mathbf{Ox}, [\theta]) \\ &= -\Omega t + \gamma \quad [2\pi] \end{aligned} \quad (3.47)$$

L'angle γ est défini par

$$\gamma = \text{atan}\left(\frac{[\theta]_y}{[\theta]_x}\right) \quad (3.48)$$

Les équations de l'équilibre dynamique du système sont données par le principe des puis-

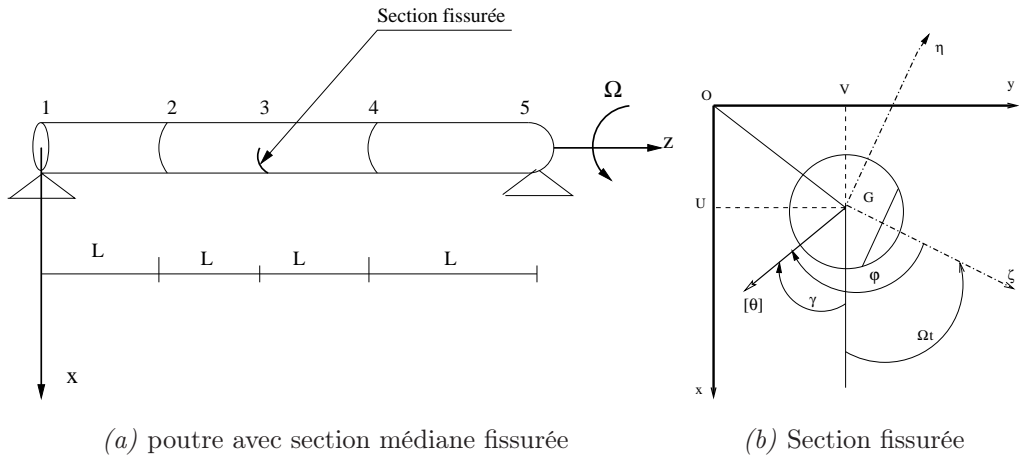


FIG. 3.17: *Modélisation par éléments finis du rotor fissuré : paramétrage*

sances virtuelles, elles s'écrivent

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathcal{D} + \mathcal{C})\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathcal{F} \quad (3.49)$$

avec

- \mathcal{M} désignant la matrice de masse,
- \mathcal{D} la matrice des amortissements visqueux,
- \mathcal{C} la matrice des effets gyroscopiques,
- $\mathcal{K}(\mathbf{q})$ la matrice de rigidité non-linéaire,
- \mathbf{q} le vecteur des déplacements nodaux,
- et \mathcal{F} le vecteur des forces nodales.

Les ddl considérés sont les déplacements suivant les axes (Ox) et (Oy) et les rotations autour de ces deux axes. Ainsi, le système dynamique à étudier est à 18 ddl.

Dans la suite $(U(t), V(t))$ désigneront les déplacements suivant (Ox) et (Oy) du nœud 3, nœud de localisation de la fissure.

Il est intéressant d'écrire

$$U(t) = U_0 + u(t)$$

afin de distinguer la flèche statique totale moyenne, U_0 .

3.5.1 Prise en compte des effets d'amortissement

La prise en compte des effets d'amortissement se fait selon l'hypothèse de Basile [56]. Dans le cas de la structure saine, la résolution du problème aux valeurs propres :

$$-w^2 \mathcal{M} + \mathcal{K} = 0 \quad (3.50)$$

conduit à :

- 18 valeurs propres réelles $w_i^2, 1 \leq i \leq 18$, dont on déduit 18 pulsations propres w_i
- 18 vecteurs propres V_i à composantes réelles représentant 18 formes propres.

Les formes propres V_i vérifient des propriétés d'orthogonalité vis-à-vis des matrices \mathcal{M} et \mathcal{K} qui découlent des symétries de ces dernières :

$$\begin{aligned} V_i^t \mathcal{M}_{ij} V_j &= \delta_{ij} m_i \\ V_i^t \mathcal{K}_{ij} V_j &= \delta_{ij} k_i = \delta_{ij} w_i^2 m_i \end{aligned} \quad (3.51)$$

où m_i désigne la masse généralisée du mode i , k_i la raideur généralisée du mode i et δ_{ij} l'indice de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En pratique, l'hypothèse de Basile est couramment utilisée en attribuant à chaque mode propre i un amortissement visqueux réduit $d_i = \frac{D_i}{2\sqrt{k_i m_i}}$ où D_i désigne l'amortissement généralisé du mode i ($V_i^t \mathcal{D}_{ij} V_j = \delta_{ij} D_i$).

3.5.2 Présentation de quelques résultats

Les premières fréquences propres de la structure saine équivalente (même géométrie et conditions aux limites) à la structure de la figure 3.17 en repos ($\Omega = 0$) sont :

$$w_1 \approx 25.44Hz \quad w_2 \approx 101.14Hz \quad w_3 \approx 227.94Hz \quad w_4 \approx 446.78Hz \quad w_5 = 686.41Hz \quad (3.52)$$

Comme mentionné dans la section (3.4.6) de ce chapitre, la présence de la fissure conduit à une légère baisse des fréquences de résonance. Ainsi, les premières fréquences de résonance de la structure fissurée sont voisines de celles données par (3.52).

Lorsque la vitesse de rotation du rotor est telle que

$$\xi = \frac{\Omega}{w_1} \approx \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

l'orbite décrite par le rotor est formée de n boucles entrelacées. Le système dynamique est siège de résonances sous-critiques (ou super-harmoniques), cf. figure 3.18. Sur le spectre de la réponse, on observe un niveau vibratoire élevé atteint par l'harmonique d'ordre n , cf. figure 3.19. Ces observations ont été mises en évidence dans le cas de l'oscillateur à 2 ddl.

Pour des vitesses surcritiques $\xi > 1$, on a vu dans le cas du système à deux paramètres

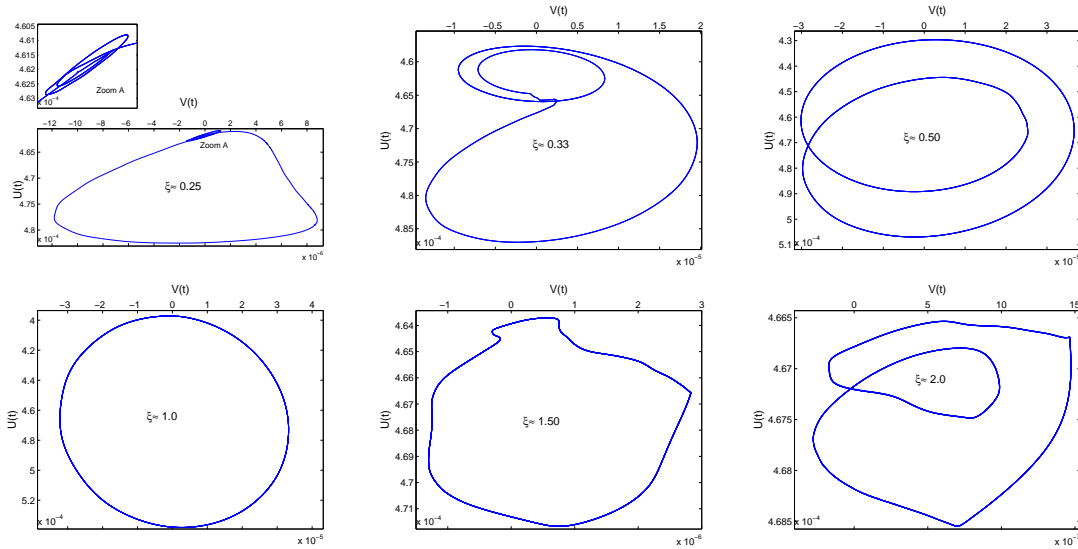


FIG. 3.18: Exemples d'orbites : $\frac{a}{D} = 25\%$, $d=0.05$

que l'orbite est formée d'une seule boucle et que le niveau de la première harmonique est dominant. On verra dans le prochain chapitre que pour des vitesses de rotations surcritiques, la réponse selon la première harmonique est suffisante pour rendre compte de la réponse vibratoire du système dynamique à deux paramètres.

Le système dynamique considéré ici est composé de $2n$ ddl ($n = 9$) conduisant à n fréquences de résonance doubles étant donné la symétrie du problème (géométrie et conditions aux limites). Les formes de l'orbite et du spectre d'amplitude sont gouvernées, pour une fissure donnée, par le rapport de la fréquence d'excitation Ω aux différentes fréquences de résonance du système ($\xi = \xi_1 = \frac{\Omega}{w_1}, \xi_2 = \frac{\Omega}{w_2}, \xi_3 = \frac{\Omega}{w_3} \dots \xi_n = \frac{\Omega}{w_n}$).

Lorsque $\xi \approx 2$, on a :

- $\Omega = 2w_1 \approx 2\frac{w_2}{4}$ d'où $\xi_2 \approx \frac{1}{2}$, ce qui explique le niveau élevé de l'harmonique d'ordre 2 à cette vitesse de rotation du rotor, cf. figure 3.19. Cet effet est également observable sur l'orbite du rotor à cette vitesse formée de deux boucles entrelacées, cf. figure 3.18.

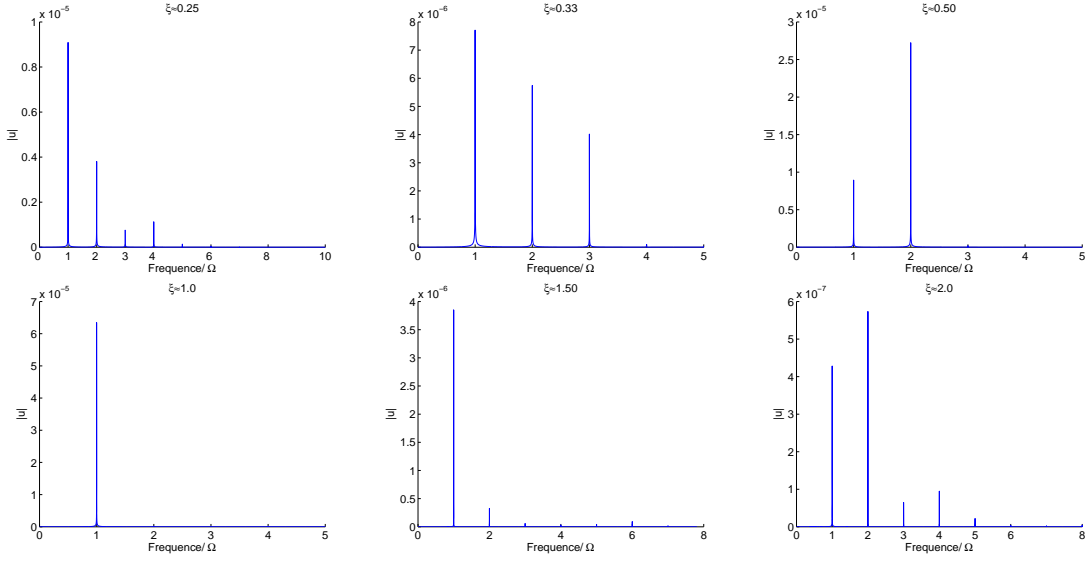


FIG. 3.19: Exemples de spectres d'amplitude de $u(t)$: $\frac{a}{D} = 25\%$, $d = 0.05$

L'approche pénalisation-implicite employée ici ne permet pas le respect des conditions de non-interpénétration des lèvres de la fissure (cf. e.g. [123]). L'emploi de valeurs élevées de

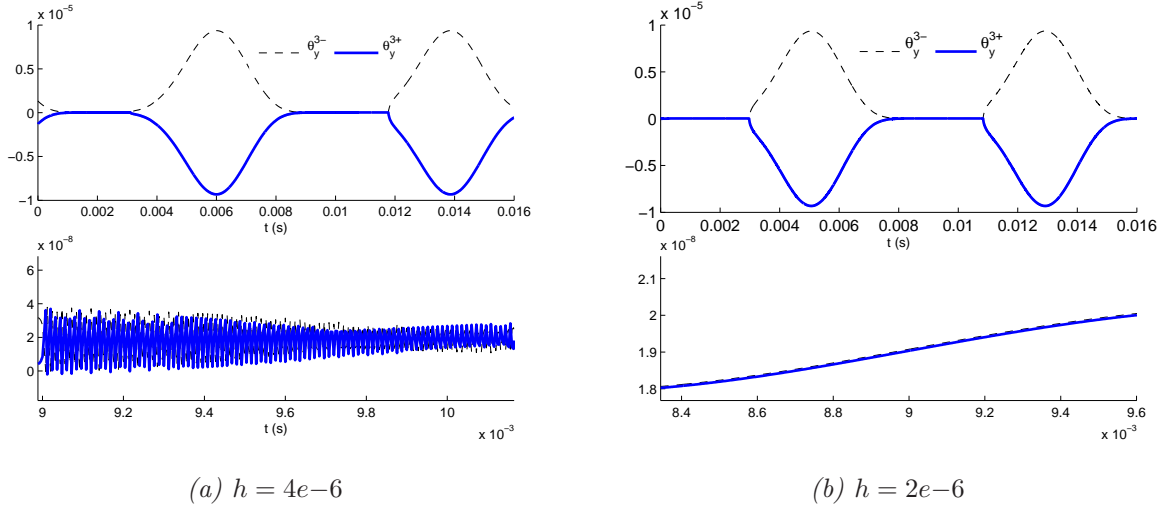


FIG. 3.20: Oscillations numériques lors du contact entre les lèvres de la fissure : $\frac{a}{D} = 25\%$, $\xi \approx 0.50$, $d=0.05$

$k(\varphi)$ lorsque la fissure est totalement fermée ($\varphi < \pi$) conduit à des oscillations numériques (non physiques). L'ampleur de ces oscillations dépend fortement des choix des paramètres

numériques, à savoir celui pénalisant les pénétrations et ceux du schéma de HHT contrôlant l'amortissement numérique. Le choix *optimal* du paramètre de pénalisation fait partie des points auxquels la méthode est sensible. Une autre source de ces oscillations numériques est celle de l'utilisation d'un schéma en temps d'ordre élevé adapté à l'approximation des fonctions régulières en temps (hypothèse de validité des développements de Taylor). Ces oscillations sont évidemment réduites lorsqu'on réduit le pas de temps, cf. figure 3.20.

On observe également des discontinuités de vitesse dues au saut de rigidité au moment de

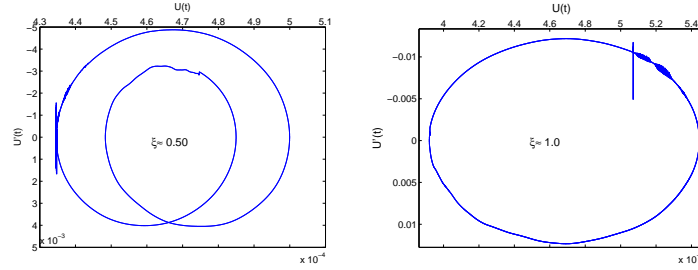


FIG. 3.21: Saut de vitesses dû à la discontinuité de rigidité au moment de la fermeture totale de la fissure : $\frac{a}{D} = 25\%$, $d = 0.05$

la fermeture totale de la fissure (choc), cf. figure 3.21.

3.5.3 Prise en compte des effets de cisaillement

La prise en compte des effets du cisaillement dans l'écriture de la loi de comportement de la section de rotor fissurée, se traduit par la relation (2.88) établie au chapitre précédent. Cette relation reliant le vecteur des efforts internes résultant au niveau de la section fissurée au sauts de déplacements et de rotations s'écrit

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu k S}{2L} k_c(\varphi_c) & -\frac{\mu k S}{4L} k'_c(\varphi_c) & 0 & 0 \\ \frac{\mu k S}{4L} k'_c(\varphi_c) & \frac{\mu k S}{2L} k_c(\varphi_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{2L} k(\varphi) & -\frac{EI}{4L} k'(\varphi) \\ 0 & 0 & \frac{EI}{4L} k'(\varphi) & \frac{EI}{2L} k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U] \\ [V] \\ [\theta]_x \\ [\theta]_y \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

On considère le système dynamique de la figure 3.17 composé de quatre éléments finis de type poutre sains. La section affectée de fissuration est située au niveau du nœud numéro 3 dont tous les ddl sont dédoublés afin de permettre l'introduction de loi de comportement

définie par (3.53). Cela veut dire qu'au niveau du nœud 3, les ddl retenus sont

$$\left\{ U^{3-}, V^{3-}, \theta_x^{3-}, \theta_y^{3-}, U^{3+}, V^{3+}, \theta_x^{3+}, \theta_y^{3+} \right\}$$

Les discontinuités de déplacements $[U]$ et $[V]$, et de rotations $[\theta]_x$ et $[\theta]_y$ au niveau de l'élément nodal représentant la section fissurée sont données par :

$$\begin{aligned} [\theta]_x &= \theta_x^{3+} - \theta_x^{3-} \text{ et } [\theta]_y = \theta_y^{3+} - \theta_y^{3-} \\ [U] &= U^{3+} - U^{3-} \text{ et } [V] = V^{3+} - V^{3-} \end{aligned}$$

Les exposants $^{3-}$ et $^{3+}$ désignent les ddl à gauche et à droite de la section fissurée, respectivement.

Afin d'avoir un effort tranchant non nul au niveau de la section fissurée, la structure est soumise, en plus de son poids propre, à une force concentrée \mathbf{F}_4 , cf. figure 3.22. Pour bien visualiser les effets du cisaillement, \mathbf{F}_4 est prise égale au poids propre de toute la structure :

$$\mathbf{F}_4 = 4L\rho Sg = 4Lmg \quad (3.54)$$

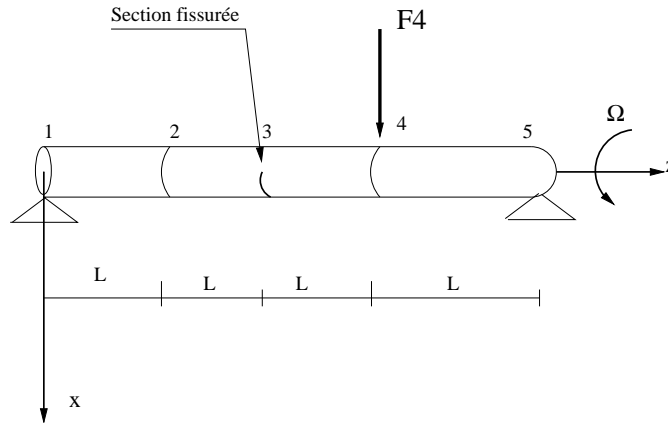


FIG. 3.22: Modélisation par éléments finis du rotor fissuré

L'examen de la réponse vibratoire du rotor montre que les effets du cisaillement sont faibles. Dans l'exemple étudié, on a considéré une fissure relativement profonde ($\frac{a}{D} = 50\%$) et un chargement conduisant à un effort tranchant important au niveau de la section fissurée, pourtant les effets constatés restent négligeables. Même pour des vitesses de rotations super-critiques, ces effets restent moyennement faibles, cf. figure 3.23.

3.6 Construction d'un élément fini de poutre fissuré

Cette partie est consacrée à la construction d'un élément fini de poutre fissuré en flexion. La souplesse additionnelle due à la présence des fissures est identifiée à partir de calculs

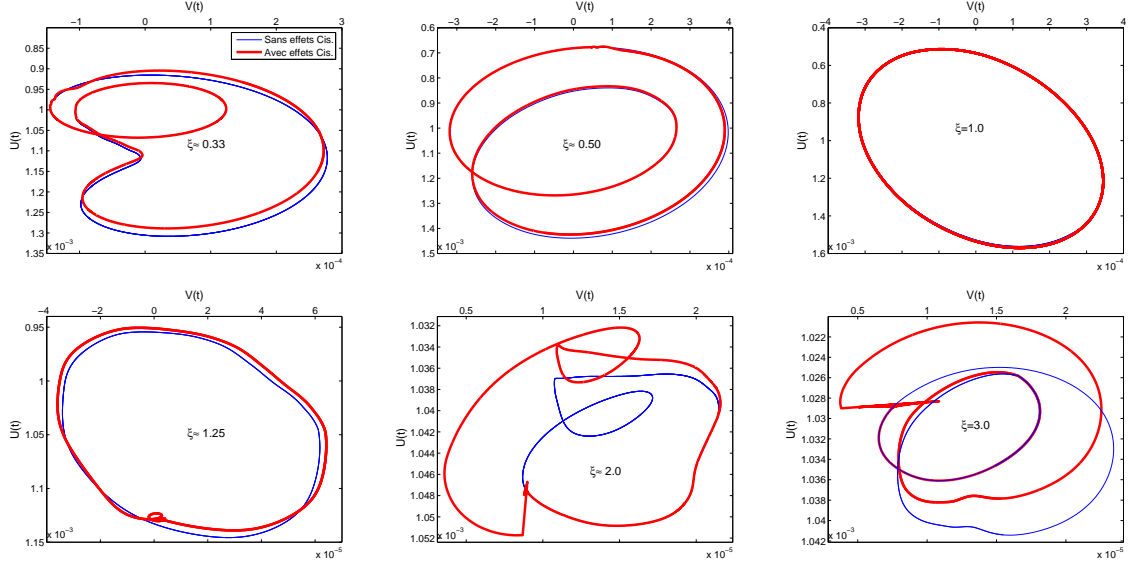


FIG. 3.23: Exemples d'orbites du rotor avec et sans considération des effets du cisaillement : $\frac{a}{D} = 50\%$, $d = 0.05$

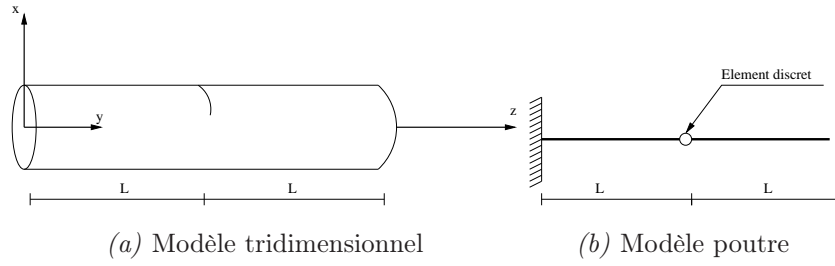


FIG. 3.24: Modélisation de l'élément de poutre fissuré

tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres comme déjà présenté au chapitre 2. Contrairement à la démarche présentée dans la section 3.5 de ce chapitre et qui consiste à définir une matrice de rigidité non-linéaire propre à la section affectée de fissuration, dans cette dernière partie de ce chapitre, on présente les étapes de construction de la matrice de rigidité d'un élément contenant une section fissurée. Ainsi, l'énergie élastique apportée par la section fissurée n'est plus concentrée au niveau de l'élément nodal qui la représente mais répartie sur toute la longueur de l'élément fissuré.

On commence alors par établir une relation de la forme

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \mathcal{S}(T_x, T_y, M_x, M_y) \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix}$ désignent, respectivement, les vecteurs chargement et déplacement résultant au niveau de la section libre ($z = 2L$).

Au niveau de la section fissurée ($z = L$), les efforts intérieurs sont donnés par :

$$\begin{cases} T_x^L = T_x \\ T_y^L = T_y \\ M_x^L = M_x - LT_y^L \\ M_y^L = M_y + LT_x^L \end{cases} \quad (3.56)$$

La respiration de la fissure est gouvernée par la direction du moment de flexion au niveau de la section fissurée $\mathbf{M} = (M_x^L, M_y^L)$. Soit $\Phi = \text{atan}\left(\frac{M_y^L}{M_x^L}\right)$, l'énergie élastique de l'élément fissuré s'écrit

$$W^*(T_x, T_y, M_x, M_y) = W_s^*(T_x, T_y, M_x, M_y) + \frac{L}{EI} \|\mathbf{M}\|^2 s(\Phi) \quad (3.57)$$

$W_s^*(T_x, T_y, M_x, M_y)$ désigne l'énergie élastique de l'élément non fissuré de même géométrie et soumis aux mêmes conditions de chargement. La relation de comportement non-linéaire reliant les efforts appliqués aux déplacements résultants au niveau de la section libre ($z = 2L$) s'obtient par dérivation de la fonction W^* par rapport à \mathbf{f} , soit, en tenant compte de (3.56),

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \left(\mathbf{S}_0 + \frac{2L}{EI} \begin{pmatrix} L^2 s(\Phi) & -\frac{L^2}{2} s'(\Phi) & \frac{L}{2} s'(\Phi) & L s(\Phi) \\ \frac{L^2}{2} s'(\Phi) & L^2 s(\Phi) & -L s(\Phi) & \frac{L}{2} s'(\Phi) \\ -\frac{L}{2} s'(\Phi) & -L s(\Phi) & s(\Phi) & -\frac{1}{2} s'(\Phi) \\ L s(\Phi) & -\frac{L}{2} s'(\Phi) & \frac{1}{2} s'(\Phi) & s(\Phi) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

On en déduit

$$\mathbf{S}(\mathbf{f}) = \mathbf{S}(\Phi) = \left(\mathbf{S}_0 + \frac{2L}{EI} \begin{pmatrix} L^2 s(\Phi) & -\frac{L^2}{2} s'(\Phi) & \frac{L}{2} s'(\Phi) & L s(\Phi) \\ \frac{L^2}{2} s'(\Phi) & L^2 s(\Phi) & -L s(\Phi) & \frac{L}{2} s'(\Phi) \\ -\frac{L}{2} s'(\Phi) & -L s(\Phi) & s(\Phi) & -\frac{1}{2} s'(\Phi) \\ L s(\Phi) & -\frac{L}{2} s'(\Phi) & \frac{1}{2} s'(\Phi) & s(\Phi) \end{pmatrix} \right) \quad (3.59)$$

où \mathbf{S}_0 désigne la matrice de souplesse d'un élément de poutre de Timoshenko sain de longueur $2L$.

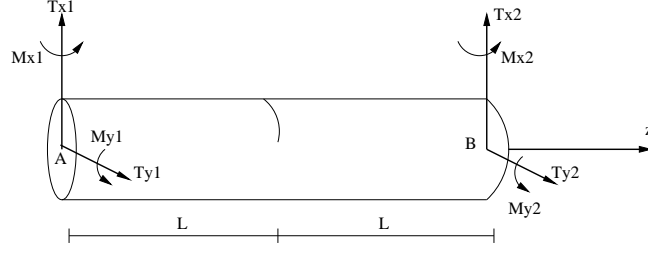


FIG. 3.25: Schéma de l'élément fini de poutre fissuré

On considère l'élément fini de poutre fissuré présenté par la figure 3.25. En appelant $\{u_{B/A}\}$, le déplacement relatif de B par rapport à A, on établit la relation suivante

$$\{T_{x_2}, T_{y_2}, M_{x_2}, M_{y_2}\}^t = (\mathcal{S}(\Phi))^{-1} \{u_{B/A}\} \quad (3.60)$$

Ensuite, on écrit les relations d'équilibre de l'élément, cf. figure 3.25, conduisant à

$$\begin{cases} T_{x_1} = -T_{x_2} \\ T_{y_1} = -T_{y_2} \\ M_{x_1} = -M_{x_2} + 2LT_{y_2} \\ M_{y_1} = -M_{y_2} - 2LT_{x_2} \end{cases} \quad (3.61)$$

soit encore en écriture matricielle

$$\{T_{x_1}, T_{y_1}, M_{x_1}, M_{y_1}, T_{x_2}, T_{y_2}, M_{x_2}, M_{y_2}\}^t = \mathbf{\Pi}_1 \{T_{x_2}, T_{y_2}, M_{x_2}, M_{y_2}\}^t \quad (3.62)$$

avec

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2L & -1 & 0 \\ -2L & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

D'autre part $\{u_{B/A}\}$ peut se mettre sous la forme

$$\{u_{B/A}\} = \{u_{B/A}^1, u_{B/A}^2, u_{B/A}^3, u_{B/A}^4\}$$

avec

$$\begin{cases} u_{x_2} = u_{B/A}^1 + u_{x_1} + 2L\theta_{y_1} \\ u_{y_2} = u_{B/A}^2 + u_{y_1} - 2L\theta_{x_1} \\ \theta_{x_2} = u_{B/A}^3 + \theta_{x_1} \\ \theta_{y_2} = u_{B/A}^4 + \theta_{y_1} \end{cases} \quad (3.64)$$

soit en écriture matricielle

$$\{u_{B/A}\} = \mathbf{\Pi}_2 \{u_{x_1}, u_{y_1}, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, u_{x_2}, u_{y_2}, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}\}^t \quad (3.65)$$

où $\mathbf{\Pi}_2$ est donnée par

$$\mathbf{\Pi}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2L & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2L & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

On remarque que $\mathbf{\Pi}_2$ n'est autre que la transposée de $\mathbf{\Pi}_1$ notée, dans ce qui suit, $\mathbf{\Pi}_1^t$.

La matrice de rigidité de l'élément de poutre fissuré, \mathbf{K}_{ef} , vérifie

$$\{T_{x_1}, T_{y_1}, M_{x_1}, M_{y_1}, T_{x_2}, T_{y_2}, M_{x_2}, M_{y_2}\}^t = \mathbf{K}_{ef} \{u_{x_1}, u_{y_1}, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, u_{x_2}, u_{y_2}, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}\}^t \quad (3.67)$$

En utilisant (4.35), on obtient

$$\mathbf{\Pi}_1 \{T_{x_2}, T_{y_2}, M_{x_2}, M_{y_2}\}^t = \mathbf{K}_{ef} \{u_{x_1}, u_{y_1}, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, u_{x_2}, u_{y_2}, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}\}^t \quad (3.68)$$

ensuite, en tenant compte de (3.60), on écrit

$$\mathbf{\Pi}_1 (S(\Phi))^{-1} \{u_{B/A}\} = \mathbf{K}_{ef} \{u_{x_1}, u_{y_1}, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, u_{x_2}, u_{y_2}, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}\}^t \quad (3.69)$$

Finalement, l'équation (3.65) conduit à

$$\mathbf{K}_{ef} = \mathbf{\Pi}_1 (\mathcal{S}(\Phi))^{-1} \mathbf{\Pi}_1^t \quad (3.70)$$

Cependant, dans un code d'éléments finis, il est préférable d'écrire la relation (3.70) en fonction des inconnus du problème (les déplacements nodaux). Cela nous conduit à établir la relation

$$(\mathcal{S}(\Phi))^{-1} = \mathcal{K}(\varphi_e) = \mathcal{K}_0 - \mathbf{K}_e(\varphi_e) \quad (3.71)$$

où \mathcal{K}_0 est la matrice de rigidité d'un élément fini de poutre de Timoshenko sain de longueur $2L$ et de moment d'inertie I , $\mathbf{K}_e(\varphi_e)$ est la matrice modélisant la perte de rigidité due à la présence de la fissure et φ_e est l'angle défini par $\varphi_e = \text{atan}\left(\frac{\theta_{y_2} - \theta_{y_1}}{\theta_{x_2} - \theta_{x_1}}\right)$.

Ainsi, \mathcal{K}_0 est donnée par [78]

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{S}_0^{-1} = \frac{EI}{2L(1+a)} \begin{pmatrix} \frac{3}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3}{L} \\ 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3}{L} & 4+a & 0 \\ -\frac{3}{L} & 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

avec $a = \frac{12EI}{4\mu kSL^2}$ le coefficient permettant la prise en compte des effets du cisaillement. Pour un élément de poutre classique, on a $a = 0$. Par suite, en exploitant la relation (3.71), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e(\varphi_e) &= \mathbf{K}_0 - (\mathcal{S}(\Phi))^{-1} \\ &= \frac{EI}{2L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4s(\Phi) + 4s^2(\Phi) + s'^2(\Phi)}{4 + 8s(\Phi) + 4s^2(\Phi) + s'^2(\Phi)} & -\frac{2s'(\Phi)}{4 + 8s(\Phi) + 4s^2(\Phi) + s'^2(\Phi)} \\ 0 & 0 & \frac{2s'(\Phi)}{4 + 8s(\Phi) + 4s^2(\Phi) + s'^2(\Phi)} & \frac{4s(\Phi) + 4s^2(\Phi) + s'^2(\Phi)}{4 + 8s(\Phi) + 4s^2(\Phi) + s'^2(\Phi)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.73)$$

On remarque que $\mathbf{K}_e(\varphi_e)$ est de la forme

$$\mathbf{K}_e(\varphi_e) = \frac{EI}{2L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{xx}(\varphi_e) & k_{xy}(\varphi_e) \\ 0 & 0 & k_{yx}(\varphi_e) & k_{yy}(\varphi_e) \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

avec

$$\begin{cases} k_{yy}(\varphi_e) = k_{xx}(\varphi_e) \\ k_{yx}(\varphi_e) = -k_{xy}(\varphi_e) \end{cases} \quad (3.75)$$

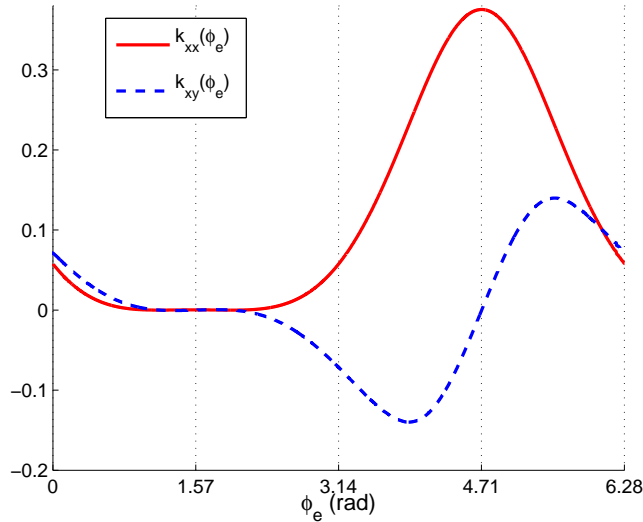


FIG. 3.26: Termes de la matrice $\mathbf{K}_e(\varphi_e)$ pour une fissure à fond droit de profondeur $a = \frac{D}{2}$

En considérant les résultats des calculs tridimensionnels réalisés sur l'élément fissuré de la figure 3.24, on identifie la fonction $s(\Phi)$ comme décrit au chapitre 2, ensuite on détermine les termes de la matrice $\mathbf{K}_e(\varphi_e)$ grâce à la relation (3.73). Les termes de la matrice $\mathbf{K}_e(\varphi_e)$

pour une fissure à fond droit de profondeur $a = \frac{D}{2}$ sont donnés par la figure 3.26. Ils montrent de faibles variations sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ tandis que sur $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, leurs variations sont importantes mais régulières. La fissure est totalement fermée pour $\varphi_e = \frac{\pi}{2}$, image de $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Elle s'ouvre totalement en $\varphi_e = \frac{3\pi}{2}$, image de $\Phi = \frac{3\pi}{2}$, cf. figure 3.27.

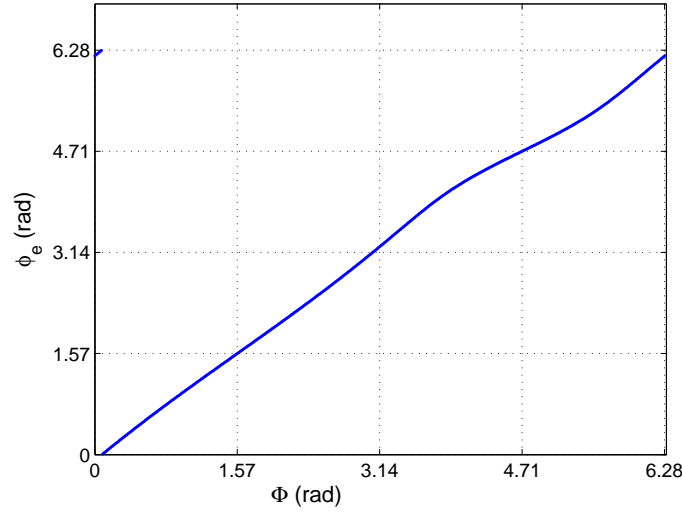


FIG. 3.27: Angle réponse φ_e en fonction de l'angle de chargement Φ

3.6.0.1. Validation de la démarche en statique

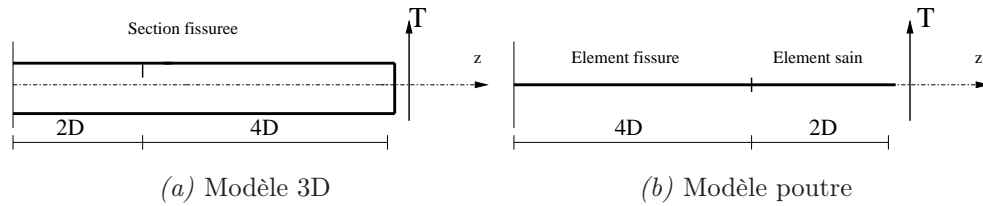


FIG. 3.28: Modélisation de la structure par éléments finis 3D et poutre

Afin de valider la démarche de construction de l'élément fini de poutre fissuré présentée ci-dessus, on se propose de comparer les résultats de la modélisation poutre à ceux de la modélisation tridimensionnelle d'une structure comportant une fissure. On considère alors un cylindre d'axe (oz) de diamètre $D = 0.5m$, de longueur totale $L_t = 3m$, encastré à son extrémité $z = 0$ et soumis à l'autre à un couple d'efforts $\mathbf{T} = (T_x = \cos(\alpha), T_y = \sin(\alpha))$, cf. figure 3.28(a). Le cylindre comporte, en $z = 1m$, une fissure à fond droit de profondeur $a = 0.5D$. Les calculs tridimensionnels réalisés avec le *Code_Aster*[©] tiennent compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure. Le modèle poutre consiste en deux éléments

finis poutre : le premier est un élément de poutre fissuré de longueur totale égale à $2m$, soit $4D$, cf. figure 3.28(b). Il comporte une fissure en $z = 1m$. Le second est un élément fini de poutre classique de longueur $1m$. La figure 3.29 montre une très bonne concordance des résultats.

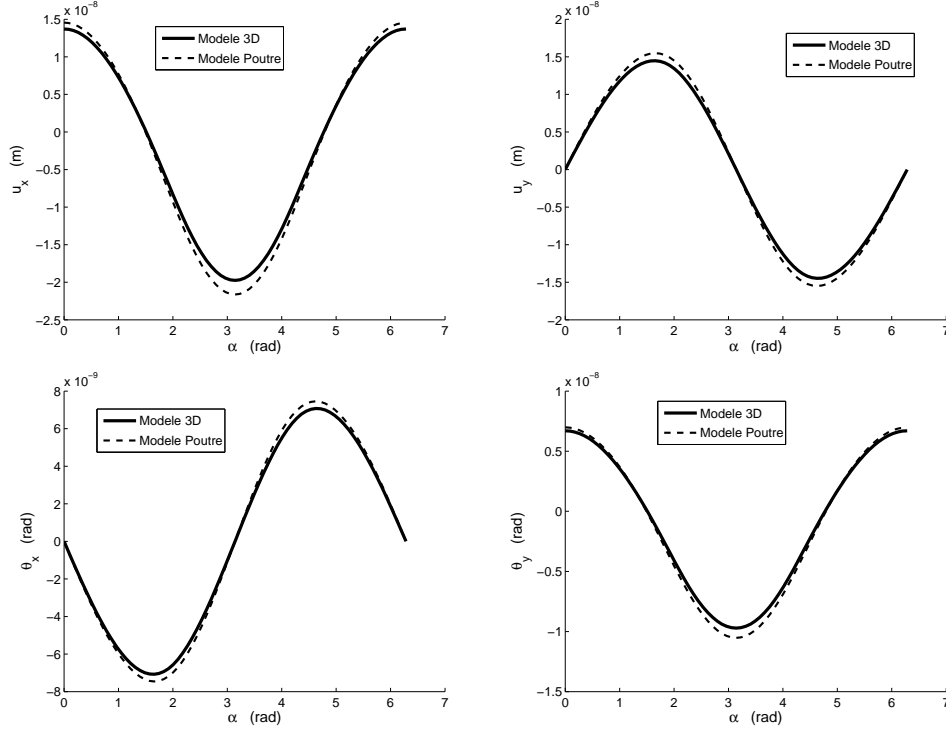


FIG. 3.29: Comparaison du modèle proposé aux résultats tridimensionnels, $\frac{a}{D} = 0.50$

3.6.1 Etude du comportement vibratoire d'un rotor fissuré en flexion

On se propose dans cette section d'explorer la réponse vibratoire d'un rotor comportant une section fissurée. Le rotor est modélisé par une poutre de masse répartie m , de section circulaire constante S , de diamètre D , comportant, à mi-portée ($L_1 = L_2$), une section fissurée. Il est simplement appuyé à ses deux extrémités et est soumise à l'effet de son poids propre. La rotation imposée au rotor se traduit par une vitesse de rotation Ω de la structure autour de son axe (Oz). On se contente de découper cette structure en trois éléments, cf. figure 3.30. Les éléments 1 – 2 et 3 – 4, de longueurs respectives L_1 et L_2 , désignent les parties saines de la structure. L'élément 2 – 3 est un élément de poutre fissuré de longueur $4D$ construit selon la démarche détaillée ci-dessus.

A l'instant $t = 0$, la fissure est totalement ouverte, cf figure 3.30(b). On suppose que la matrice de rigidité reste inchangée entre deux instants $t_n = nh$ et $t_{n+1} = (n+1)h$ où h est

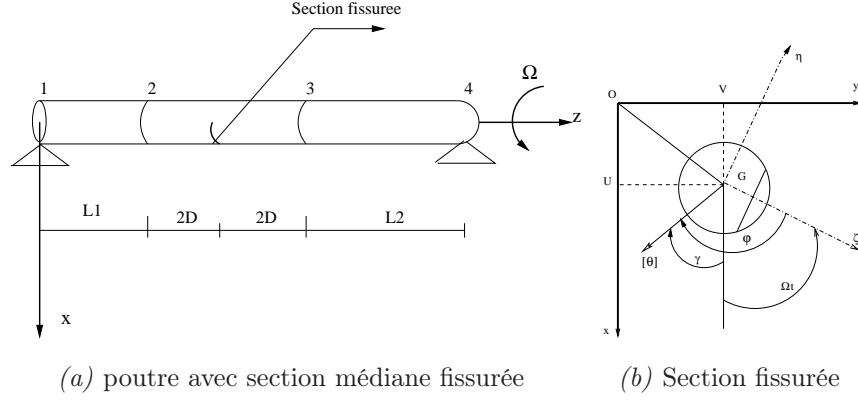


FIG. 3.30: Modélisation de la structure par éléments finis

le pas de temps utilisé pour l'intégration numérique du système dynamique. Afin d'assurer la validité de cette approximation, il faut considérer des pas de temps relativement petits par rapport à la période de la réponse vibratoire du système. Dans le domaine des basses fréquences, cette contrainte est facile à surmonter. La matrice de rigidité est alors actualisée à la fin de chaque pas de temps. La méthode d'intégration numérique utilisée ici est celle de HHT avec :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{2} + \alpha \text{ et } \beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2$$

ce qui correspond, dans le cas linéaire, à un schéma implicite inconditionnellement stable de précision maximale.

La modélisation de la structure fissurée par des éléments finis de type poutre sains connectés par un élément fini de poutre fissuré permet de tenir compte de façon exacte de la condition de contact unilatéral entre les lèvres de la fissure. Ceci se traduit, au moment de la fermeture totale de la fissure, par

$$\mathbf{K}_e(\varphi_e) = \mathbf{0}$$

La matrice de rigidité de l'élément fissuré est celle d'un élément sain.

De plus, grâce à cette modélisation, les pas de temps utilisés sont 20 à 100 fois plus grands que ceux utilisés pour l'intégration du système dynamique en suivant la méthode implicite-pénalisation décrite précédemment ce qui permet un gain énorme en temps de calculs et en espace de stockage des résultats numériques.

L'examen de la réponse vibratoire du système dynamique montre, là encore, la présence du phénomène de résonance super-harmonique aux passages par des vitesses de rotation voisines de sous-multiples de la première vitesse critique. Ainsi, pour

$$\xi \approx \frac{w_1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

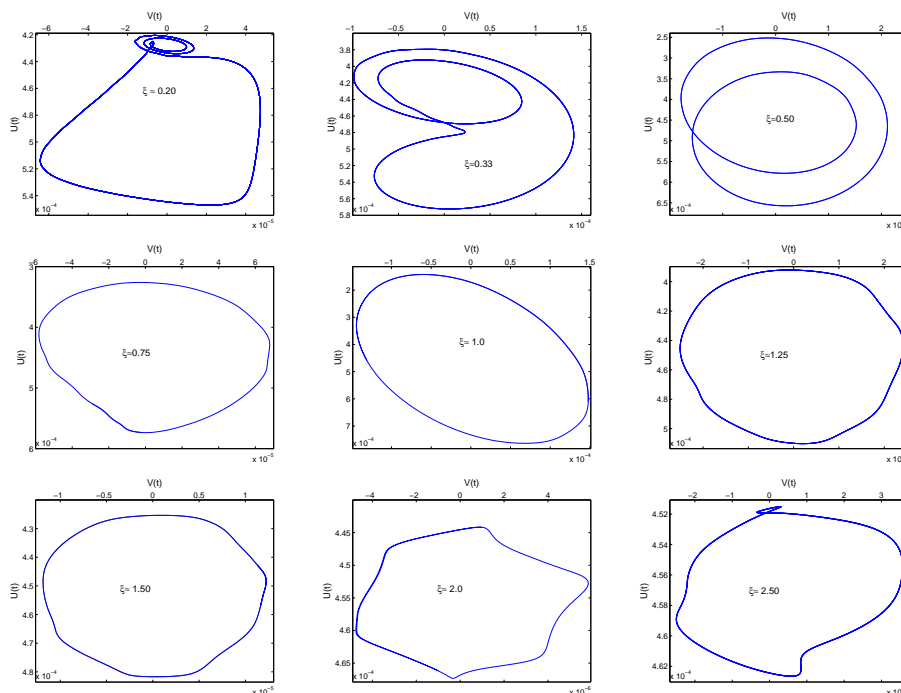


FIG. 3.31: Exemples d'orbites du nœud 2, $\frac{a}{D} = 0.50$, $d=0.05$

l'orbite et le diagramme des phases du rotor sont formés de n boucles entrelacées, cf. figures 3.31 & 3.32 . Le niveau vibratoire de l'harmonique d'ordre n est relativement élevé, cf figure 3.33.

3.7 Conclusions

L'étude menée dans ce chapitre consiste à explorer numériquement la réponse vibratoire d'un rotor contenant une section fissurée. Trois modèles ont été présentés :

- Le premier modèle est composé de deux barres rigides représentant les parties saines du rotor reliées par un ressort non-linéaire modélisant la section affectée de fissures. La loi de comportement retenue pour le ressort non-linéaire travaillant en flexion est de nature mathématique proche de celle d'une section de poutre fissurée telle que présentée dans le chapitre 2.
- Le second, consiste à relier des éléments finis de type poutre de Timoshenko représentant les parties saines du rotor par un élément nodal (longueur nulle et ddl dédoublés) dont la loi de comportement est celle d'une section de poutre fissurée identifiée à partir de calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure.
- Dans le troisième modèle, on relie les éléments de poutre sains par un élément fini fissuré

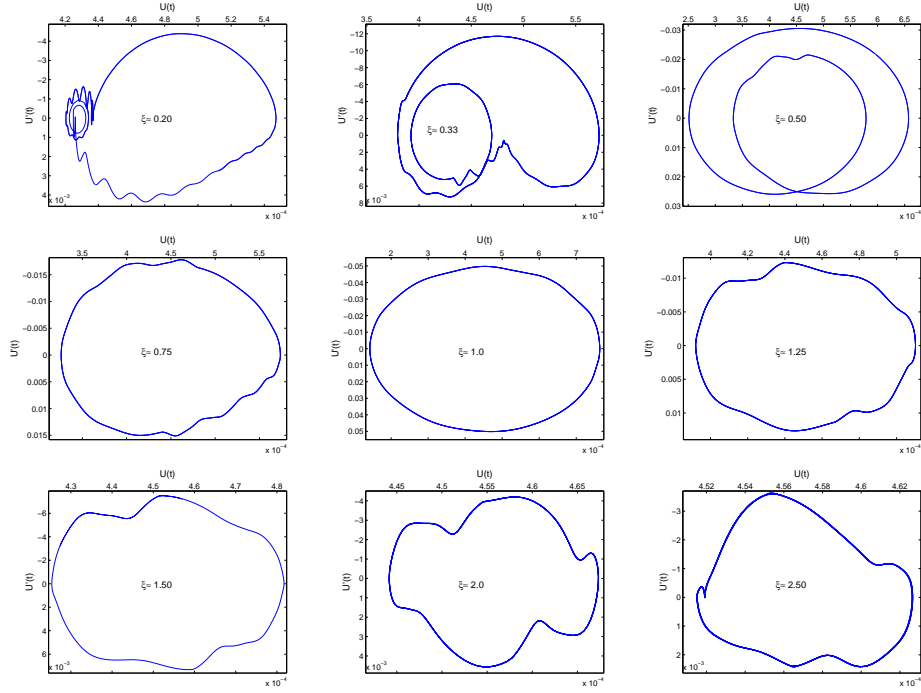


FIG. 3.32: Exemples de diagrammes de phase du nœud 2, $\frac{a}{D} = 0.50$, $d=0.05$

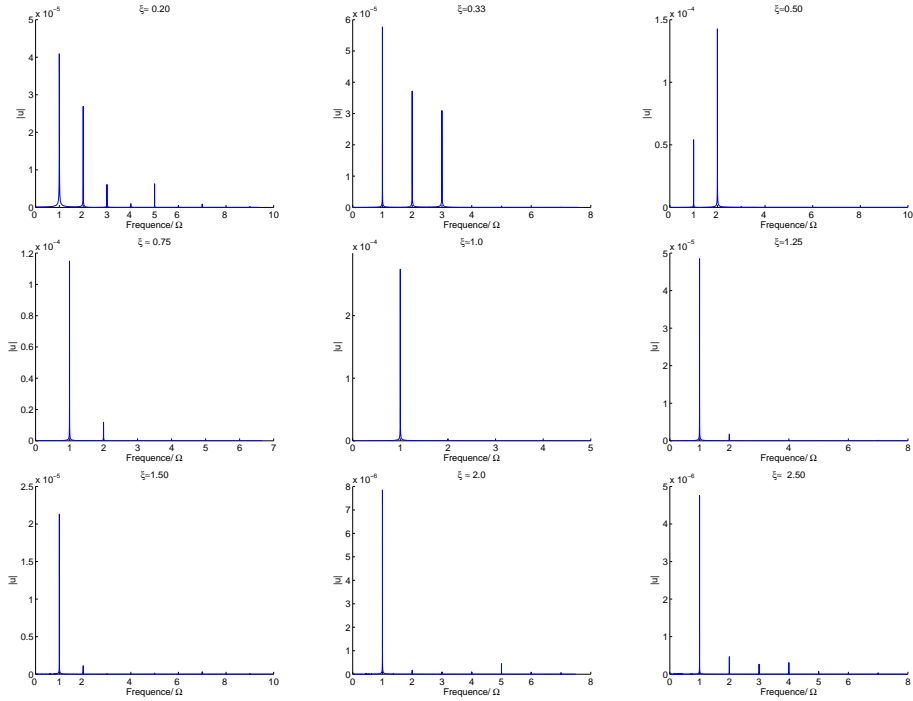


FIG. 3.33: Exemples de spectres d'amplitude de $u(t)$ $\frac{a}{D} = 0.50$, $d=0.05$

dont la matrice de rigidité est construite en se basant sur des calculs tridimensionnels pour représenter finement l'évolution de la souplesse apportée par la fissure.

Le premier modèle a permis, avec des coûts de calculs réduits et des méthodes d'intégration numérique classiques (Newmark et Runge-Kutta d'ordre 4), de mettre en évidence les deux phénomènes suivants :

- glissement faible des fréquences de résonance dû à la présence de la fissure,
- résonances super-harmoniques aux passages par des fréquences de rotation du rotor voisines de sous-multiples entiers de la première vitesse critique. Ce phénomène se traduit par un changement dans la forme de l'orbite du rotor et du diagramme de phase ainsi que du niveau vibratoire des harmoniques excitées.

La technique de pénalisation employée dans le second modèle pour la prise en compte des conditions de contact unilatéral entre les lèvres de la fissure a conduit à l'apparition de fréquences numériques très élevées dont l'amortissement a nécessité l'emploi de la méthode d'intégration numérique HHT permettant l'introduction de l'amortissement numérique dans la méthode de Newmark sans dégrader la précision. Le second phénomène décrit ci-dessus a également été mis en évidence. Grâce à ce modèle on a montré que les effets du cisaillement sur la réponse vibratoire de la structure sont relativement faibles.

Par rapport au second modèle, le troisième présente les avantages suivants :

- prise en compte de façon exacte du phénomène de respiration de la fissure,
- réduction des coûts de calculs de 20 à 100 fois

On a également mis en évidence, grâce à ce modèle, le phénomène de résonances super-harmoniques.

Dans le prochain chapitre, on va considérer le système dynamique à deux ddl dans le but de rechercher, analytiquement, des solutions périodiques et présenter de nouveaux paramètres permettant de caractériser les effets de la présence de fissures sur sa réponse vibratoire.

Chapitre 4

Étude analytique du modèle à deux paramètres

Sommaire

4.1	Présentation	109
4.2	Choix de la méthode de résolution	110
4.3	Système dynamique à deux paramètres : rappel	110
4.4	Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_s	112
4.4.1	Equations dynamiques : Cas d'oscillateurs découplés	112
4.4.2	Equations dynamiques : Cas d'oscillateurs couplés	116
4.5	Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_2	120
4.5.1	Equations dynamiques	120
4.5.2	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs découplés . .	124
4.5.3	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs couplés . . .	128
4.6	Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_3	133
4.6.1	Equations dynamiques	133
4.6.2	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs découplés . .	135
4.6.3	Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs couplés . . .	137
4.7	Étude de stabilité : théorie de Floquet	141
4.7.1	Oscillateur à un degré de liberté	143
4.7.2	Oscillateur à plusieurs degrés de liberté	148
4.7.3	Application au système dynamique à 2 ddl	152
4.8	Conclusions	156

4.1 Présentation

Cette étude a pour but de déterminer une réponse périodique du modèle à deux paramètres par le calcul analytique ou semi-analytique sous les hypothèses suivantes :

1. hypothèse H_0 de petits mouvements autour de la position d'équilibre sous poids propre ;
2. hypothèse de comportement simplifié ; trois cas sont considérés pour décrire la variation périodique de la rigidité globale du système :
 - (a) dans le premier, une rigidité sinusoïdale est considérée (H_s),
 - (b) dans le second, la rigidité est à deux niveaux (H_2),
 - (c) et enfin, la rigidité reste constante sur une demi-période pour devenir sinusoïdale sur l'autre (H_3).

La méthode adoptée ici pour résolution du système différentiel résultant est celle de la balance harmonique. Cette méthode réduit le problème de recherche de solutions périodiques d'un système dynamique en temps continu à la résolution d'un système algébrique dont la solution regroupe les amplitudes des composantes sinusoïdales de la solution périodique recherchée [89, 88].

Lorsque le système algébrique est résolu exactement, on obtient une solution analytique approchée du système dynamique. La solution est approchée car le nombre d'harmoniques mis en jeu est fini. Cependant, on parle de solution semi-analytique du système dynamique lorsque le système algébrique correspondant est résolu numériquement.

Pour chacune des hypothèses (H_s), (H_2), et (H_3) de variation périodique de la rigidité, on distingue les deux sous-cas ci-dessous :

1. la fissure est peu profonde et la perte de rigidité qu'elle induit est faible. En négligeant les termes de second ordre, on aboutit à un système dynamique de deux oscillateurs découplés dont une solution analytique approchée est présentée,
2. la fissure est profonde et la perte de rigidité est importante. Les deux oscillateurs décrivant la dynamique du système sont maintenant couplés. Le système algébrique correspondant obtenu par la méthode de la balance harmonique est résolu numériquement.

Les résultats analytiques (ou semi-analytiques) obtenus dans chacun des cas présentés ci-dessus sont comparés aux résultats de l'intégration numérique du système dynamique correspondant par la méthode de Newmark ou par celle de Runge-Kutta d'ordre 4 mises en oeuvre sous *MATLAB*®.

4.2 Choix de la méthode de résolution

Un système mécanique est dit non-linéaire lorsque sa réponse est *non additive* ou *non homogène* [126]. Contrairement aux systèmes linéaires pour lesquels des outils performants sont disponibles, les systèmes non-linéaires demeurent largement inaccessibles, à l'exception des systèmes faiblement non-linéaires auxquels s'applique la théorie des perturbations [86, 87]. On ne saurait parler de méthodes générales applicables aux systèmes non-linéaires. Leur diversité exige que l'on aborde chaque problème non seulement avec précaution mais aussi avec des outils appropriés.

La méthode des perturbations consiste à chercher la solution d'une équation différentielle non-linéaire sous la forme d'une série de puissances croissantes d'un paramètre ϵ associé aux termes non-linéaires. Ainsi, pour résoudre l'équation

$$y' = f(y, t, \epsilon) \text{ avec } y(0) = b \quad (4.1)$$

on cherche une solution de la forme

$$y = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (4.2)$$

où y_0 est la solution de (4.1) lorsque $\epsilon = 0$ et y_1 et y_2 sont des fonctions indépendantes de ϵ . Ici ϵ doit être "assez petit" pour que les séries convergent. On conçoit ainsi que la méthode s'applique essentiellement à l'étude de l'effet des faibles non-linéarités. Différentes variantes de cette méthode s'intitulent également *méthode de Lindsted-Poincaré*, *méthode des échelles multiples* [89]. L'inconvénient de la méthode est qu'elle est lourde à mettre en œuvre dès que l'on désire dépasser les premiers termes du développement, ou lorsqu'il s'agit de systèmes complexes [126]. Le fait que la convergence n'est assurée que pour ϵ petit, exclut les systèmes possédant une non-linéarité importante. Ceci justifie notre choix d'utilisation de la méthode de la balance harmonique qui est facile à mettre en œuvre. De plus, le fait que le système à étudier comprend seulement deux ddl permet de considérer un grand nombre d'harmoniques avec des coûts de calcul restant relativement réduits (pour le cas de solutions semi-analytiques).

4.3 Système dynamique à deux paramètres : rappel

On rappelle ici le modèle à deux paramètres (cf. figure 4.3) tel que décrit au chapitre précédent. Il s'agit de deux barres rigides identiques AG et GB, de section circulaire d'aire S , de longueurs respectives a et b et de masse répartie m . Elles sont liées en G par une liaison élastique non-linéaire travaillant en flexion tandis que les extrémités A et B sont des articulations fixes. La liaison en G est censée traduire une rigidité globale dans un rotor

fissuré tournant. La rotation du rotor se traduit par une vitesse de rotation imposée Ω des barres autour de leur axe. Sous l'influence du poids propre et de cette rotation imposée, les petits mouvements du point G sont décrits par les petits déplacements $(U(t), V(t), 0)$ dans le système d'axes fixes $Oxyz$.

La liaison en G représente une section fissurée possédant une énergie élastique non-linéaire $W_{elas} = W([\theta]_x, [\theta]_y)$. L'énergie élastique totale du système se réduit ici à W_{elas} . Pour déduire son expression, on introduit l'angle γ

$$\gamma = (\mathbf{Ox}, [\theta]) \in [0, 2\pi] \quad (4.3)$$

qui est défini lorsque $[\theta] \neq \mathbf{0}$. Dans ce cas $\tan(\gamma) = -\frac{U}{V}$, ce qui donne $\gamma = -\arctan(\frac{U}{V}) + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Pour $\gamma \in [0, 2\pi]$, on a $n \in \{0, 1, 2\}$.

L'orientation de la fissure est définie par une direction matérielle $\mathbf{O}\zeta$ telle que $(\mathbf{Ox}, \mathbf{O}\zeta) =$

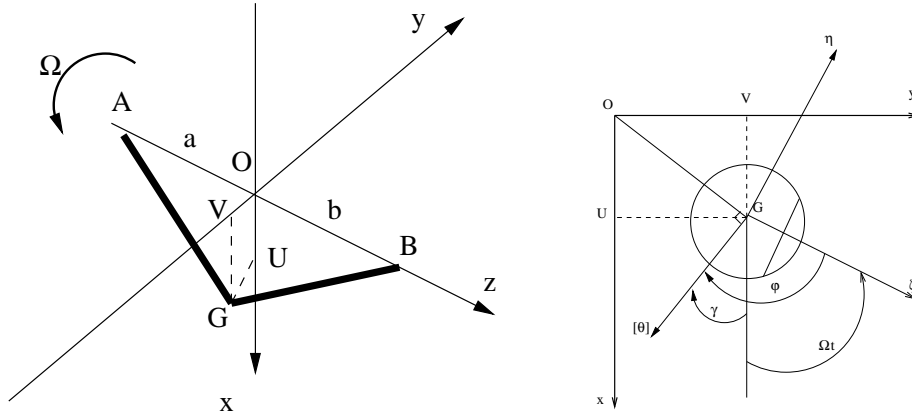


FIG. 4.1: Modèle à deux paramètres. (Oxy) repère fixe et $(O\zeta\eta)$ repère tournant

Ωt compte tenu de la rotation imposée du rotor.

Pour admettre que l'énergie élastique s'écrit sous la forme

$$W = \frac{1}{2}k(\varphi)([\theta]_x^2 + [\theta]_y^2)$$

dans laquelle $k(\varphi)$ représente une rigidité directionnelle, fonction périodique de φ de période 2π , on introduit l'angle

$$\varphi = (\mathbf{O}\zeta, [\theta]) = (\mathbf{O}\zeta, \mathbf{Ox}) + (\mathbf{Ox}, [\theta]) = \gamma - \Omega t \in [0, 2\pi] \quad \text{modulo } 2\pi \quad (4.4)$$

Les moments associés aux rotations à chaque instant t sont alors

$$M_x = \frac{\partial W}{\partial [\theta]_x} \text{ et } M_y = \frac{\partial W}{\partial [\theta]_y}$$

On choisit dans cet exemple à deux degrés de liberté une loi de comportement de nature mathématique proche de celle d'un élément de section fissurée en flexion bi-axée. Cela signifie que la loi de comportement suivante est adoptée

$$\begin{pmatrix} M_\zeta \\ M_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_\zeta \\ [\theta]_\eta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Dans le repère fixe ($Oxyz$), cette loi de comportement s'écrit

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\varphi) & -\frac{1}{2}k'(\varphi) \\ \frac{1}{2}k'(\varphi) & k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_x \\ [\theta]_y \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Les équations dynamiques du système s'obtiennent à partir du Principe des Puissances Virtuelles. En négligeant les effets gyroscopiques, on écrit

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi)U(t) - \frac{1}{2}k'(\varphi)V(t) = p_0 \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi)V(t) + \frac{1}{2}k'(\varphi)U(t) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

où

$$M_0 = \frac{\rho S}{3}(a+b)\mathfrak{L}^2 + \rho I \mathfrak{L}, p_0 = m_2 g, m_2 = m \frac{a+b}{2} \mathfrak{L}^2 \text{ et } \frac{1}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad 1$$

D est le coefficient d'amortissement visqueux défini par $D = 2dM_0w_0$ avec d le coefficient d'amortissement réduit et $w_0 = \sqrt{\frac{k_0}{M_0}}$.

Pour des petits mouvements sous poids propre, comme U est prédominant par rapport à V , l'angle γ est proche de $\frac{3\pi}{2}$ de sorte que l'approximation $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t$ est justifiée. Les équations dynamiques s'écrivent dans cette approximation

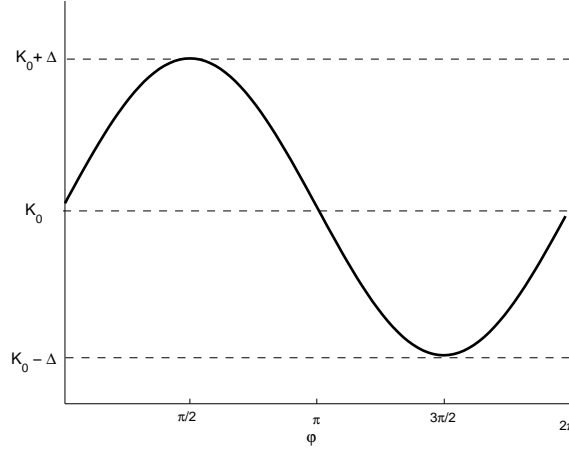
$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi)U(t) - \frac{1}{2}k'(\varphi)V(t) = m_2 g \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi)V(t) + \frac{1}{2}k'(\varphi)U(t) = 0 \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t \end{cases} \quad (4.8)$$

4.4 Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_s

4.4.1 Equations dynamiques : Cas d'oscillateurs découplés

Dans ce cas, on a comme donnée, cf. figure 4.2.

$$k(\varphi) = k_0 + \Delta \sin \varphi \quad (4.9)$$

FIG. 4.2: *Rigidité sinusoïdale*

Le système d'équations (4.8) s'écrit alors

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + (k_0 - \Delta \cos \Omega t) U(t) + \frac{1}{2} V(t) \Delta \sin \Omega t = p_0 \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + (k_0 - \Delta \cos \Omega t) V(t) - \frac{1}{2} U(t) \Delta \sin \Omega t = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Il est d'autre part intéressant d'écrire la réponse sous la forme

$$U(t) = U_s + u(t), \quad V(t) = V_s + v(t) \quad (4.11)$$

dans laquelle $(U_s = \frac{p_0}{k_0}, V_s = 0)$ est la réponse statique sous poids propre du système avec la rigidité k_0 . Compte tenu de l'hypothèse H_0 , qui admet que $|u(t)| \ll |U_s|$ et $|v(t)| \ll |U_s|$, la forme asymptotique linéarisée suivante des équations dynamiques

$$\begin{cases} M_0 \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + k_0 u(t) = U_s \Delta \cos \Omega t \\ M_0 \ddot{v}(t) + D \dot{v}(t) + k_0 v(t) = \frac{1}{2} U_s \Delta \sin \Omega t \end{cases} \quad (4.12)$$

est valable lorsque $\Delta \ll k_0$

4.4.1.1. Etude des solutions périodiques

Les équations (4.12) décrivent les vibrations forcées de deux oscillateurs simples découplés dont les résultats sont bien connus. Il s'agit d'une vibration forcée par une excitation périodique et régie par un système différentiel linéaire à coefficients constants.

¹Le lecteur peut remarquer que les variables sont multipliées par \mathcal{L}^2 par rapport aux notations du chapitre précédent, mais le système dynamique à résoudre est toujours le même.

En assimilant le plan (Oxy) au plan complexe et en posant $z(t) = u(t) + iv(t)$, le système d'équations (4.12) s'écrit

$$M_0 \ddot{z}(t) + D \dot{z}(t) + k_0 z(t) = \frac{U_s \Delta}{4} (3e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \quad (4.13)$$

En écrivant la solution sous la forme

$$z(t) = U_s \frac{\Delta}{k_0} (z_1 e^{i\Omega t} + z_{-1} e^{-i\Omega t}) \quad (4.14)$$

on obtient

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\frac{3}{4}}{(1 - \xi^2 + 2id\xi)} \\ z_{-1} = \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \xi^2 - 2id\xi)} \end{cases} \quad (4.15)$$

$\xi = \frac{\Omega}{w_0}$ désigne la fréquence d'excitation relative.

4.4.1.2. Résultats et discussions

Dans le plan complexe, $z_1 e^{i\Omega t}$ et $z_{-1} e^{-i\Omega t}$ sont deux orbites circulaires de rayons respectifs $|z_1|$ et $|z_{-1}|$. Elles sont parcourues une fois par tour dans le sens directe (sens de Ω) et retrograde, respectivement. Leur superposition forme une ellipse parcourue une fois par tour dans le sens directe car $|z_1| > |z_{-1}|$.

D'après (4.15), le niveau vibratoire augmente avec la vitesse de rotation jusqu'à $\xi = 1$ où il atteint son niveau maximum (résonance). Au-delà, il décroît rapidement pour retrouver des valeurs relativement basses, cf. figure 4.4.

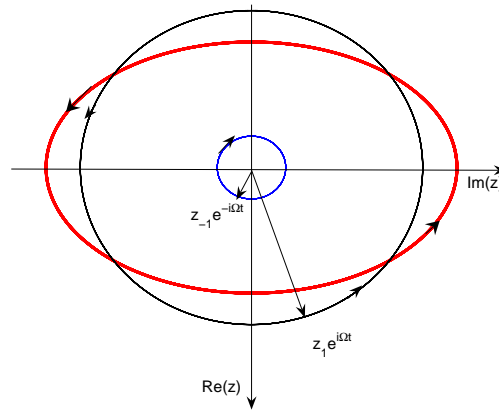


FIG. 4.3: *Ellipse résultante des orbites directe et retrograde*

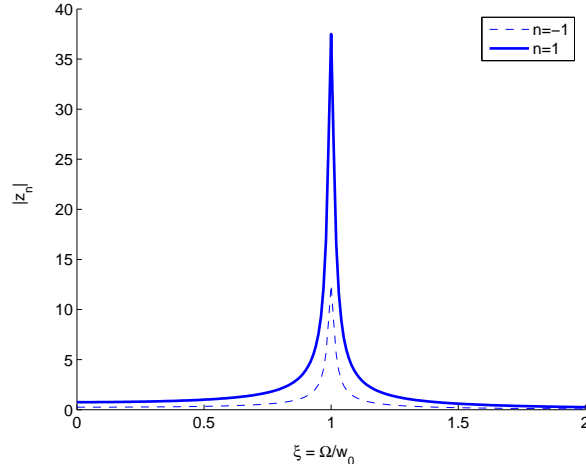


FIG. 4.4: Variations de $|z_1|$ et de $|z_{-1}|$ en fonction de $\xi = \frac{\Omega}{w_0}$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $d=0.01$

La solution donnée par (4.14) est comparée à celle de l'intégration numérique (selon le schéma de Newmark) du système non-linéaire (4.7) avec la rigidité sinusoidale (H_s). La

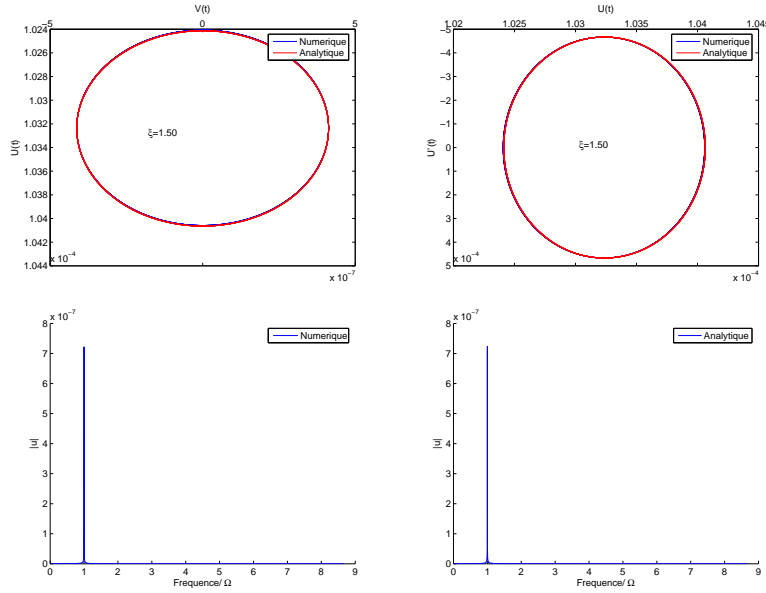


FIG. 4.5: Comparaison des résultats numériques (Newmark) et analytiques, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $\xi \approx 1.50$, $d=0.01$

figure 4.5 montre que pour des fissures peu profondes ($\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$) et des vitesses surcritiques ($\xi \approx 1.50$), les résultats numériques et analytiques sont concordants. Lorsque la vitesse de rotation est voisine d'un sous-multiple entier de la vitesse critique ($\xi \approx \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$...), les

niveaux des harmoniques ($2\times, 3\times \dots$) deviennent importants ce que la solution donnée par (4.14) ne permet pas de mettre en évidence, cf. figure 4.6.

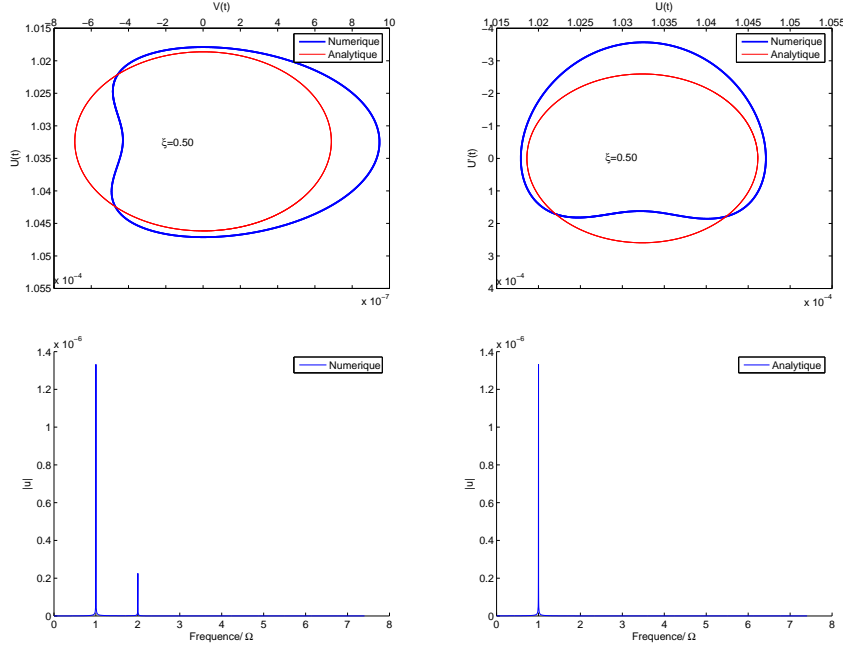


FIG. 4.6: Comparaison des résultats numériques (Newmark) et analytiques, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $\xi \approx 0.50, d=0.01$

Pour remédier à ce problème, le paragraphe suivant est consacré à la résolution du système différentiel (4.10) avec prise en compte des effets de second ordre qui devient nécessaire lorsque la perte de rigidité (mesurée par $\frac{\Delta}{k_0}$) est importante.

4.4.2 Equations dynamiques : Cas d'oscillateurs couplés

Lorsqu'il s'agit de fissures profondes, Δ ne peut être négligé devant k_0 et le système d'équations (4.10) s'écrit

$$\begin{cases} M_0 \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + (k_0 - \Delta \cos \Omega t) u(t) + \frac{1}{2} \Delta \sin \Omega t v(t) = U_s \Delta \cos \Omega t \\ M_0 \ddot{v}(t) + D \dot{v}(t) + (k_0 - \Delta \cos \Omega t) v(t) - \frac{1}{2} \Delta \sin \Omega t u(t) = \frac{U_s}{2} \Delta \sin \Omega t \end{cases} \quad (4.16)$$

Contrairement aux oscillateurs décrits par (4.12), ceux décrits par (4.16) sont couplés. En posant $z(t) = u(t) + iv(t)$, le système d'équations (4.16) peut se mettre sous la forme

$$M_0 \ddot{z}(t) + D \dot{z}(t) + (k_0 - \frac{\Delta}{4} (3e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})) z(t) = \frac{U_s \Delta}{4} (3e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \quad (4.17)$$

En considérant les solutions de la forme

$$z(t) = \frac{U_s \Delta}{k_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n e^{in\Omega t} \quad (4.18)$$

on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left((1 - (n\xi)^2 + 2ind\xi) e^{in\Omega t} - \frac{\Delta}{4k_0} (3e^{i(n+1)\Omega t} + e^{i(n-1)\Omega t}) \right) z_n = \frac{1}{4} (3e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \quad (4.19)$$

L'application de la méthode de la balance harmonique nécessite de faire l'approximation

$$z(t) \approx \frac{U_s \Delta}{k_0} \sum_{n=-N}^{n=N} z_n e^{in\Omega t} \quad (4.20)$$

et par conséquent à ne prendre en compte que les N premières harmoniques. On verra plus loin que seules les quelques premières sont d'effets significatifs. Cette approximation permet d'écrire (4.19) sous la forme

$$\sum_{n=-N}^{n=N} \left((1 - (n\xi)^2 + 2ind\xi) e^{in\Omega t} - \frac{\Delta}{4k_0} (3e^{i(n+1)\Omega t} + e^{i(n-1)\Omega t}) \right) z_n = \frac{1}{4} (3e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \quad (4.21)$$

conduisant à un système algébrique à coefficients constants de $(2N+1)$ équations à $(2N+1)$ inconnues (les coefficients z_n) dont la résolution numérique ne pose pas de difficultés.

4.4.2.1. Résultats et discussions

Afin de distinguer le terme statique ($n = 0$) des termes variables, on écrit

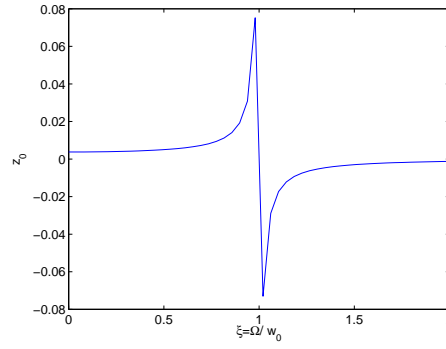
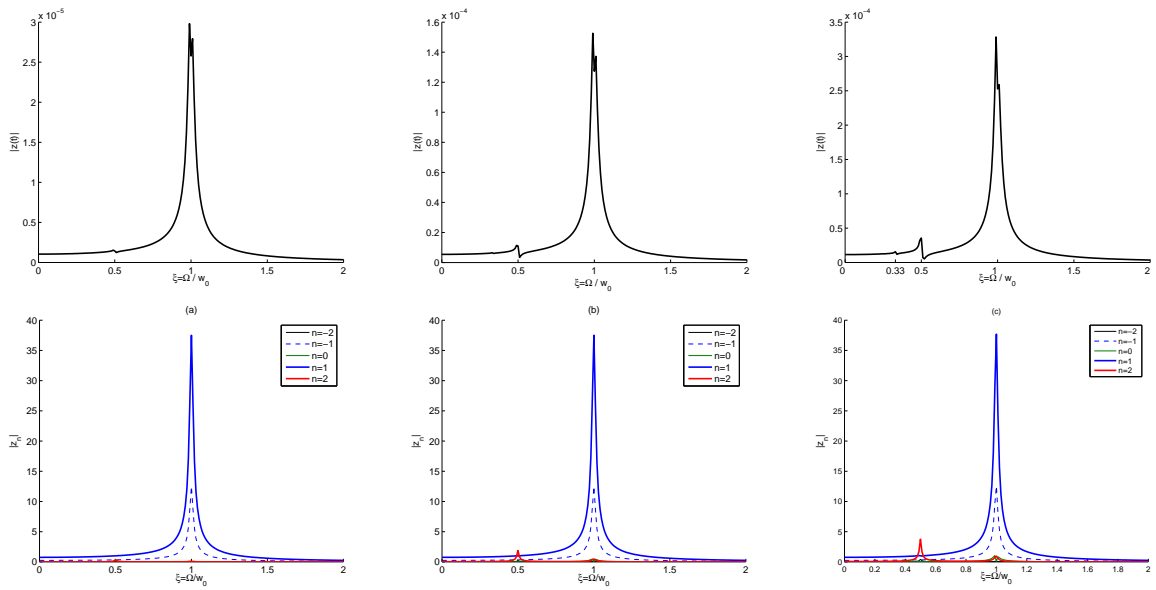
$$z(t) = z_0 + z_v(t) = z_0 + u_v(t) + iv_v(t) \quad (4.22)$$

La flèche statique moyenne totale est ainsi donnée par

$$|U_0| = |U_s(1 + \frac{\Delta}{k_0} z_0)| \quad (4.23)$$

Lorsque la vitesse de rotation est inférieure à la vitesse critique, la prise en compte des effets de second ordre conduit à une augmentation de la flèche statique moyenne. Pour des vitesses surcritiques, il y a diminution, cf. figure 4.7. La prise en compte des effets de second ordre (couplage entre les deux oscillateurs), a permis la mise en évidence d'une réponse selon la seconde harmonique dont le niveau croît avec $\frac{\Delta}{k_0}$ et ne peut être négligé pour des vitesses de rotation faibles (ξ voisin de $\frac{1}{2}$), cf. figure 4.8.

Les figures 4.8 et 4.9 montrent que pour des vitesses de rotation surcritiques ($\xi > 1$), la réponse du système est dominée par les effets de la première harmonique. Les résultats numériques, la réponse du système sans prise en compte des effets de couplages (où seule la

FIG. 4.7: Variation de z_0 en fonction de la vitesse de rotationFIG. 4.8: Variations de $|z(t = 0)|$ et de $|z_n|$ en fonction de la vitesse de rotation : (a) $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, (b) $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, (c) $\frac{\Delta}{k_0} = 0.1$, $d=0.01$

première harmonique est présente) et celle où les oscillateurs sont couplés, sont concordants. Pour des vitesses de rotation faibles, la prise en compte des effets de couplage permet une meilleure approximation de la solution en considérant l'apport des harmoniques qui devient négligeable au-delà de $N = 3$, cf. figure 4.10.

Les effets des harmoniques supérieures ($2\times, 3\times \dots$), pour des vitesses de rotation surcritiques ($\xi > 1$), sont négligeables devant ceux de la première harmonique. Dans ce cadre et comme le montre la figure 4.12, on peut se limiter, dans (4.21), à $N = 1$ pour écrire

$$z(t) \approx \frac{U_s \Delta}{k_0} (z_0 + z_{-1} e^{-i\Omega t} + z_1 e^{i\Omega t}) \quad (4.24)$$

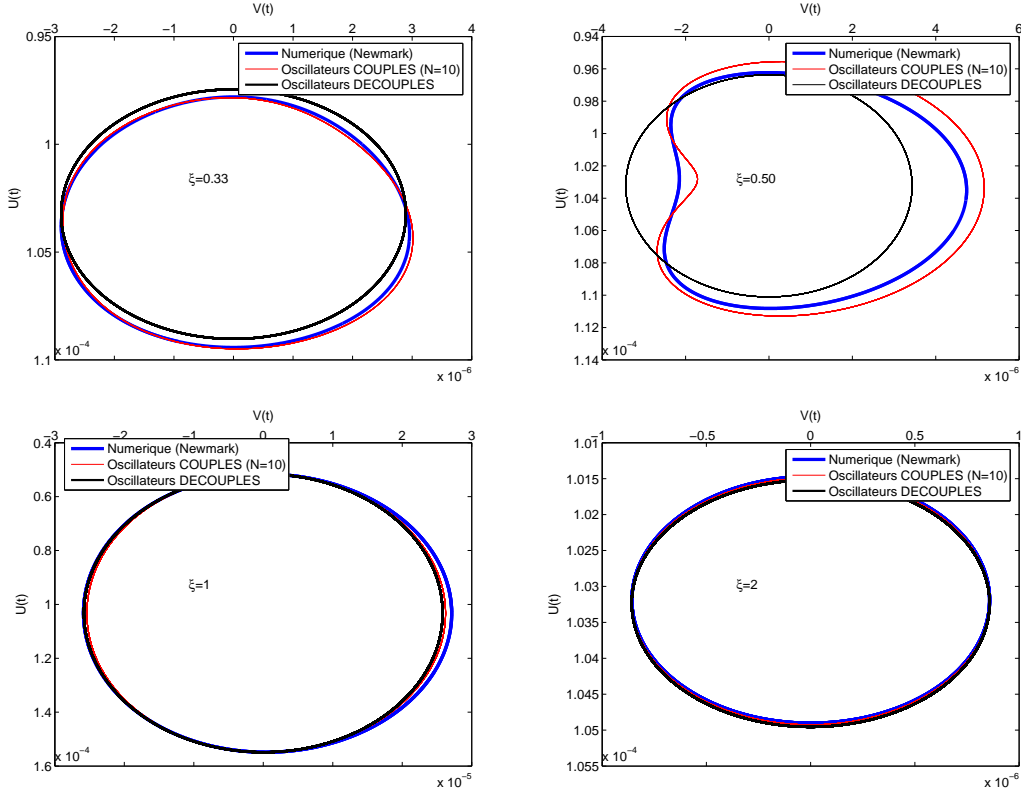


FIG. 4.9: Comparaison des orbites, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $d=0.05$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{-1} = \frac{\frac{1}{4F(-1)}}{1 - \frac{3}{16}(\frac{\Delta}{k_0})^2(\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(-1)})}, z_0 = \frac{\frac{3}{16}\frac{\Delta}{k_0}(\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(-1)})}{1 - \frac{3}{16}(\frac{\Delta}{k_0})^2(\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(-1)})} \\ z_1 = \frac{\frac{1}{4F(1)}}{1 - \frac{3}{16}(\frac{\Delta}{k_0})^2(\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(-1)})}, F(-1) = 1 - \xi^2 - 2id\xi, F(1) = 1 - \xi^2 + 2id\xi \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Lorsque les fissures se propagent, la structure se trouve affaiblie et sa rigidité moyenne, k_0 , décroît. Δ croît car $k_s = k_0 + \Delta$, désignant la rigidité de la structure sans fissures, est une constante. La flèche statique moyenne totale, $|U_0|$, croît remarquablement avec la perte de rigidité, mais elle est peu sensible aux variations de vitesse, cf. figure 4.13(a).

L'examen du niveau vibratoire de la structure montre qu'il est aussi sensible à la perte de rigidité qu'aux variations de la vitesse de rotation du rotor. Il croît avec la profondeur de la fissure ($\frac{\Delta}{k_0}$) et décroît avec la vitesse de rotation (cf. figure 4.13(b)).

Un suivi continu de ces deux paramètres peut être de grande utilité pour détecter la présence

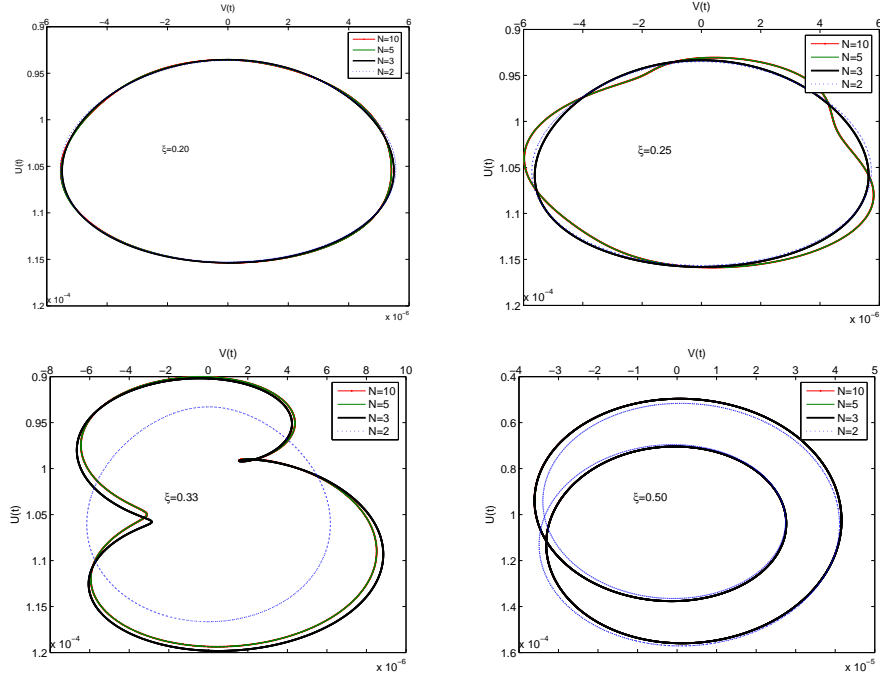


FIG. 4.10: Réponse du système au-dessous de la vitesse critique pour différentes valeurs de N , $\frac{\Delta}{k_0} = 0.1$, $d=0.01$

de fissures ou leur propagation.

4.5 Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_2

4.5.1 Equations dynamiques

Lorsque la rigidité globale de la structure est à deux niveaux (H_2), le système mécanique correspondant est linéaire par morceaux, cf. figure 4.14. La fissure est totalement ouverte ou totalement fermée. La rigidité globale de la structure est définie par

$$k(\varphi) = \begin{cases} K_0 + \Delta & \forall \varphi \in [0, \pi[\\ K_0 - \Delta & \forall \varphi \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \quad (4.26)$$

les équations (4.8) deviennent

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi) U(t) = p_0 \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi) V(t) = 0 \\ k(\varphi) = K_0 + \Delta & \forall t/2n\pi < \frac{3\pi}{2} - \Omega t < (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \\ k(\varphi) = K_0 - \Delta & \forall t/(2n+1)\pi < \frac{3\pi}{2} - \Omega t < (2n+2)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.27)$$

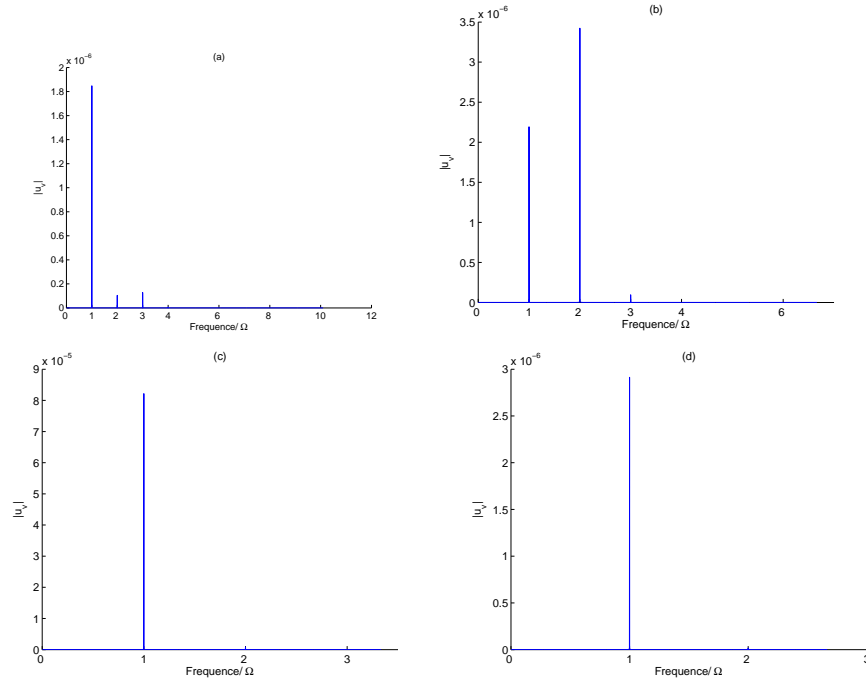


FIG. 4.11: Spectres d'amplitude de $u_v(t)$, (a) : $\xi = 0.33$, (b) : $\xi = 0.50$, (c) : $\xi = 1$, (d) : $\xi = 1.25$. $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$

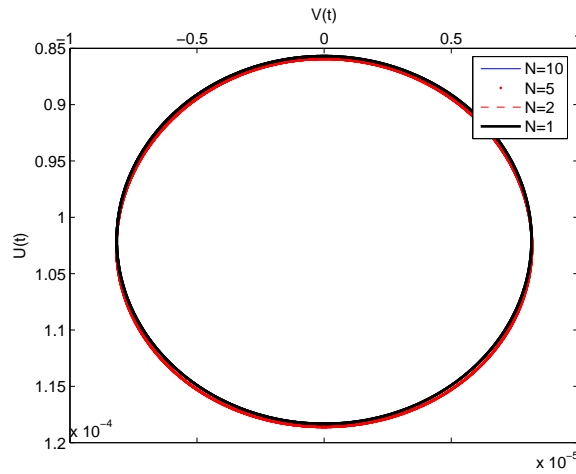


FIG. 4.12: Réponse du système au-delà de la vitesse critique pour différentes valeurs de N , $\frac{\Delta}{k_0} = 0.2$, $\xi = 1.50$, $d=0.01$

Lorsque $\varphi = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, le saut de rigidité correspond à une force intérieure de type impulsion (choc) et crée donc une discontinuité des vitesses $[\dot{U}] = \dot{U}_+ - \dot{U}_-$ et $[\dot{V}] = \dot{V}_+ - \dot{V}_-$. Les équations de saut s'obtiennent à partir de (4.8) en interprétant ces équations sous forme

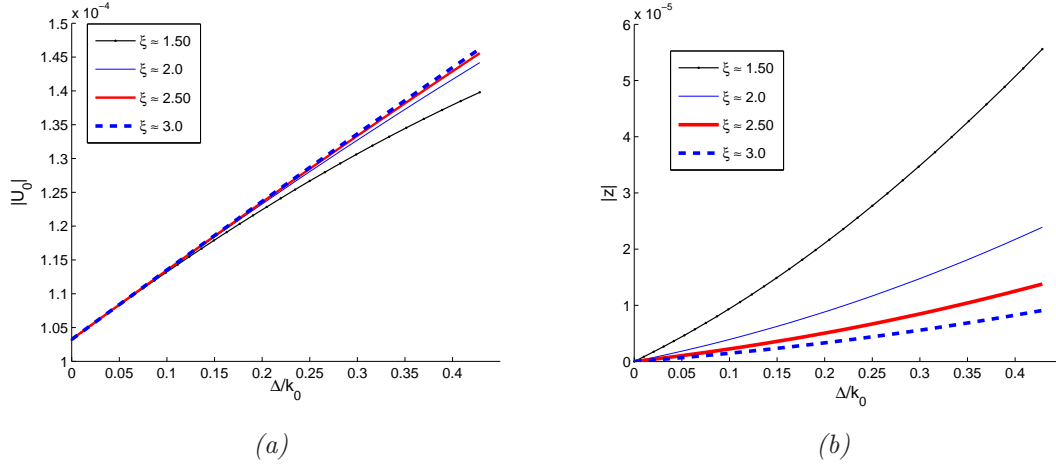
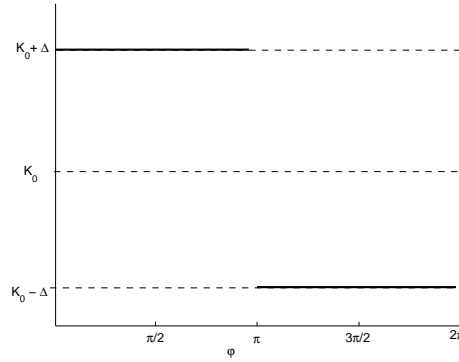
FIG. 4.13: Réponse du système au-delà de la vitesse critique, $d=0.01$ 

FIG. 4.14: Rigidité à deux niveaux

des distributions :

$$\begin{cases} M_0[\dot{U}] - \Delta V = 0 \\ M_0[\dot{V}] + \Delta U = 0 \\ \forall t/\frac{3\pi}{2} - \Omega t = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} M_0[\dot{U}] + \Delta V = 0 \\ M_0[\dot{V}] - \Delta U = 0 \\ \forall t/\frac{3\pi}{2} - \Omega t = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.29)$$

L'ensemble des équations (4.27), (4.28) et (4.29) décrit la dynamique du système. On voit que le couplage est dû uniquement aux chocs avec saut des vitesses. A chaque choc, le système peut gagner ou donner de l'énergie mécanique à l'extérieur dont l'action est d'imposer la vitesse de rotation Ω . L'existence d'une réponse cyclique signifie que l'énergie échangée sur une période est nulle.

On peut aussi exprimer la fonction périodique $k(\varphi)$ en série de Fourier pour retrouver le

résultat par des calculs sans chocs. En tenant compte de l'approximation $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t$, on écrit

$$k(\varphi) = k_0 + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t) \quad (4.30)$$

$$k'(\varphi) = \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) \quad (4.31)$$

et le système d'équations dynamiques (4.8) devient

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + (k_0 + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t)) U(t) \\ \quad - \frac{2\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) V(t) = p_0 \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + (k_0 + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t)) V(t) \\ \quad + \frac{2\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) U(t) = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

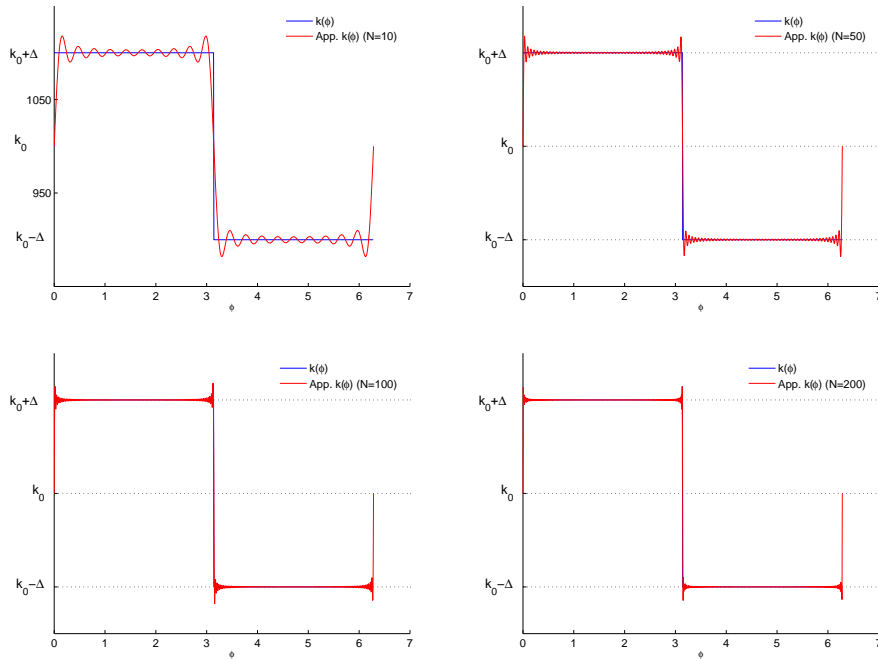


FIG. 4.15: Approximation de $k(\varphi)$ par série de Fourier

4.5.2 Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs découplés

Lorsque $\Delta \ll k_0$, les termes de second ordre peuvent être négligés et les équations (4.32) se réduisent au système suivant

$$\begin{cases} M_0 \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + k_0 u(t) + \frac{4U_s \Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t) = 0 \\ M_0 \ddot{v}(t) + D \dot{v}(t) + k_0 v(t) + \frac{2U_s \Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

En posant $z(t) = u(t) + iv(t)$, le système d'équations (4.33) s'écrit alors

$$M_0 \ddot{z}(t) + D \dot{z}(t) + k_0 z(t) = \frac{U_s \Delta}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n-1} e^{i(2n-1)\Omega t} \quad (4.34)$$

Ainsi, en considérant les solutions de la forme

$$z(t) = \frac{U_s \Delta}{\pi k_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n e^{in\Omega t} \quad (4.35)$$

on obtient

$$z_{2n-1} = (-1)^{n+1} \frac{\frac{2n+1}{2n-1}}{(1 - ((2n-1)\xi)^2 + 2i(2n-1)d\xi)} \quad (4.36)$$

$\xi = \frac{\Omega}{w_0}$ désigne la fréquence d'excitation relative et $d = \frac{D}{2M_0 w_0}$ l'amortissement visqueux réduit.

4.5.2.1. Analyse des résultats et discussions

Pour comparer les résultats de la résolution analytique avec ceux de l'intégration numérique de (4.7) par la méthode de Newmark, la courbe de rigidité donnée par la figure 4.14 est remplacée par celle de la figure 4.16 afin de tenir compte du saut en $\varphi = \pi$. Sur $[\pi, \pi + \alpha\Delta]$ et $[2\pi - \alpha\Delta, 2\pi]$, la rigidité est affine de pente $\mp p$, $|p| = \frac{2}{\alpha}$.

Pour des fissures peu profondes ($\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$), la solution donnée par (4.35) et (4.36), où seules les harmoniques impaires sont présentes ($1 \times, 3 \times, 5 \times, \dots$), est, pour des vitesses sur-critiques, concordante avec celle de l'intégration numérique du système (4.7) avec la rigidité (H_2), cf. figure 4.17.

Lorsque la vitesse de rotation passe par des sous-multiples entiers (et impairs) de la vitesse critique ($\xi \approx 1/7, 1/5, 1/3, \dots$), l'examen de la réponse vibratoire du système montre la présence de pics d'amplitude successifs indiquant la présence de résonance super-harmonique, cf. figure 4.18. Lorsque ($\xi \neq \frac{1}{2n-1}$), $|z_{2n-1}|$ décroît en $\frac{1}{n^2}$: seules les quelques premières harmoniques sont d'effets significatifs sur la réponse vibratoire du système.

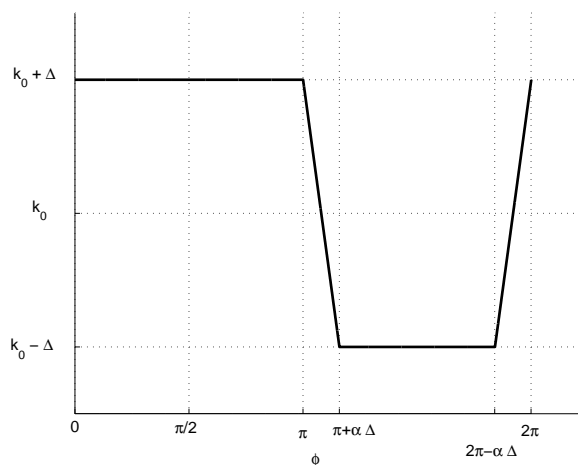


FIG. 4.16: *Rigidité à deux niveaux utilisée pour l'intégration numérique du système dynamique*

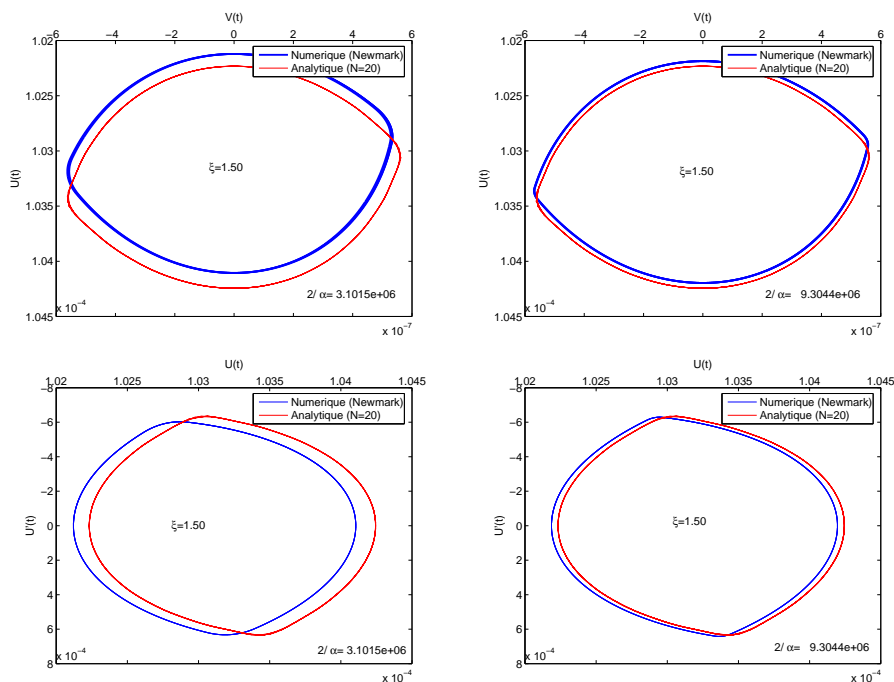


FIG. 4.17: *Comparaison des résultats numériques et analytiques (orbites et diagrammes de phases), $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $d=0.1$*

Gouvernée par les harmoniques aux niveaux les plus élevés, la forme de l'orbite varie avec la vitesse de rotation de l'arbre, cf. figure 4.20. Au-delà de la vitesse critique, elle comprend une seule boucle car le niveau de la première harmonique est dominant. L'orbite est parcourue dans le sens direct car $|z_1| > |z_{-1}|$.

Au voisinage de la moitié de la vitesse critique ($\xi \approx \frac{1}{2}$), les résultats numériques et analy-

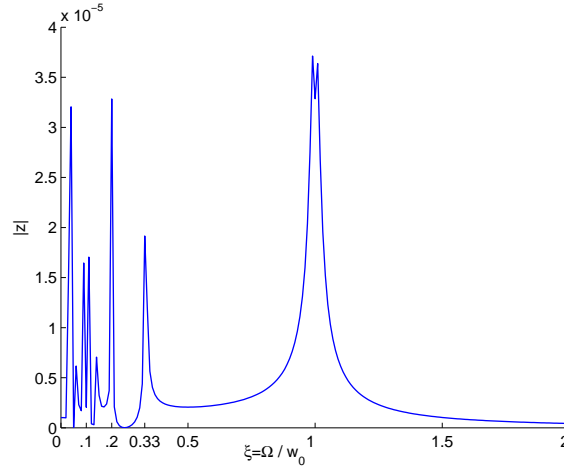


FIG. 4.18: Variations du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de rotation ($t=0$) : $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $d=0.01$

tiques ne sont pas concordants. Ceci est dû à l'absence, dans la solution analytique, de la seconde harmonique qui, à cette vitesse, atteint son niveau maximum, cf. figure 4.21.

Pour tenir compte des harmoniques paires ($2\times, 4\times, 6\times, \dots$) et, dans le cas de fissures profondes, du couplage éventuel entre les oscillateurs, les termes de second ordre seront pris en compte dans le paragraphe suivant.

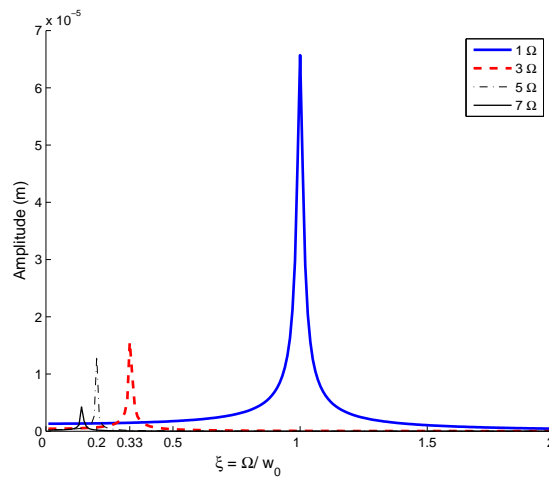


FIG. 4.19: Niveaux des harmoniques, $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$

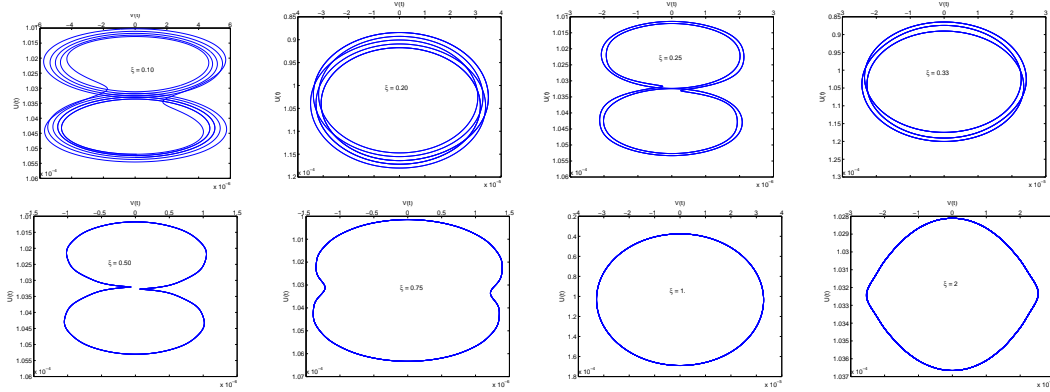


FIG. 4.20: Exemples d'orbites pour différentes valeurs de $\xi = \frac{\Omega}{w_0}, d=0.01, \frac{\Delta}{k_0} = 0.01$

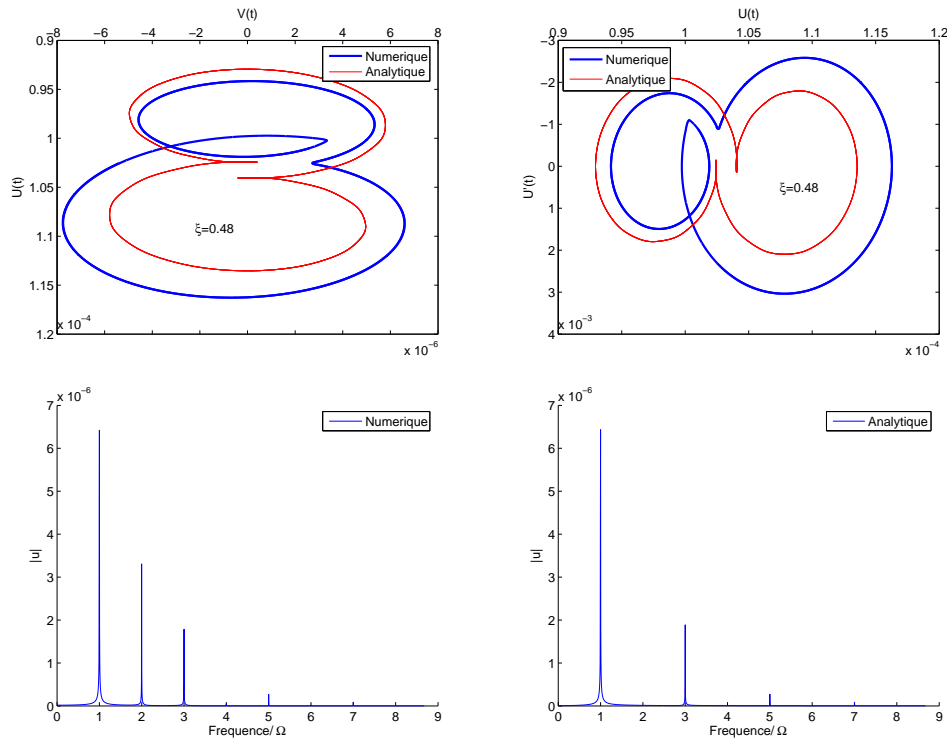


FIG. 4.21: Comparaison des résultats numériques (Newmark) et analytiques, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $\xi = 0.48, d=0.05$

4.5.3 Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs couplés

Dans le cas de fissures profondes, Δ ne peut être négligé devant k_0 et le système d'équations (4.32) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + \left(k_0 + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t) \right) u(t) \\ \quad - \left(\frac{2\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) \right) v(t) \\ \quad = -\frac{4U_s\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t) \\ M_0 \ddot{v}(t) + D \dot{v}(t) + \left(k_0 + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t) \right) v(t) \\ \quad + \left(\frac{2\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) \right) u(t) \\ \quad = -\frac{2U_s\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) \end{array} \right. \quad (4.37)$$

En posant de la même manière que précédemment $z(t) = u(t) + iv(t)$, le système d'équations (4.37) conduit à

$$\begin{aligned} M_0 \ddot{z}(t) + D \dot{z}(t) + \left(k_0 + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos((2n-1)\Omega t) + i \frac{2\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin((2n-1)\Omega t) \right) z(t) \\ = \frac{U_s\Delta}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n-1} e^{i(2n-1)\Omega t} \end{aligned} \quad (4.38)$$

soit encore

$$M_0 \ddot{z}(t) + D \dot{z}(t) + \left(k_0 + \frac{\Delta}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{2n+1}{2n-1} e^{i(2n-1)\Omega t} \right) z(t) = \frac{U_s\Delta}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n-1} e^{i(2n-1)\Omega t} \quad (4.39)$$

En considérant les solutions de la forme

$$z(t) = \frac{U_s\Delta}{\pi k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j e^{ij\Omega t} \quad (4.40)$$

on obtient

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 - (j\xi)^2 + 2ij d \xi) z_j e^{ij\Omega t} + \frac{\Delta}{\pi k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \frac{2k+1}{2k-1} e^{i(2k-1+j)\Omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n-1} e^{i(2n-1)\Omega t} \quad (4.41)$$

où $\xi = \frac{\Omega}{w_0}$ désigne la fréquence d'excitation relative et $d = \frac{D}{2M_0 w_0}$ l'amortissement visqueux réduit.

Pour la résolution de l'équation (4.41), on fait une troncature de la base de Fourier conduisant à négliger les harmoniques d'ordres supérieurs à N . On verra plus loin que, comme dans le cas précédent, seules les premières harmoniques ont des effets significatifs sur la réponse du système, cf. figure 4.22.

Ainsi

$$z(t) \approx \frac{U_s \Delta}{\pi k_0} \sum_{j=-N}^{j=N} z_j e^{ij\Omega t} \quad (4.42)$$

et l'équation (4.41) devient

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{j=N} (1 - (j\xi)^2 + 2ij d\xi) z_j e^{ij\Omega t} + \frac{\Delta}{\pi k_0} \sum_{j=-N}^{j=N} z_j \sum_{k=-N}^{k=N} (-1)^k \frac{2k+1}{2k-1} e^{i(2k-1+j)\Omega t} \\ = \sum_{n=-N}^{n=N} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n-1} e^{i(2n-1)\Omega t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

conduisant à un système linéaire de $(2N+1)$ équations à $(2N+1)$ inconnues dont la résolution numérique ne pose pas de difficultés.

4.5.3.1. Analyse et comparaison des résultats

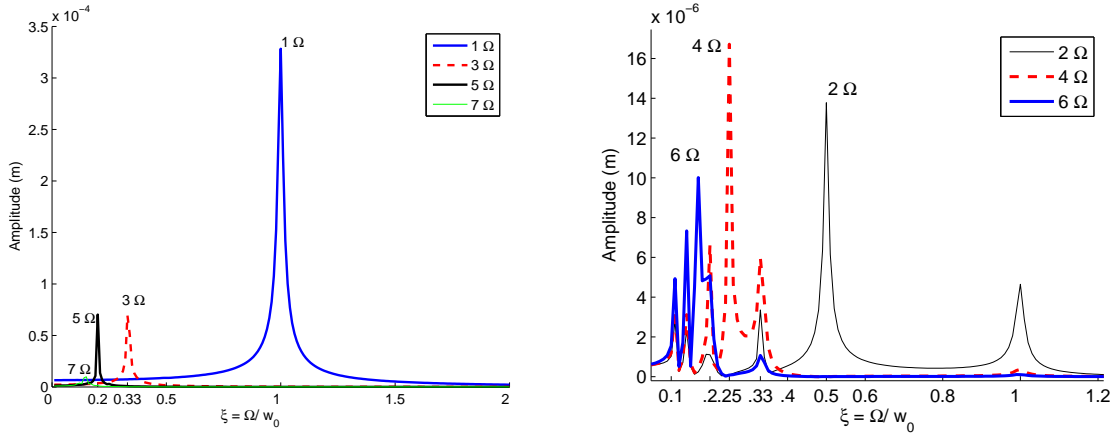


FIG. 4.22: Niveaux des harmoniques, $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$

Afin de distinguer le terme statique (z_0) des termes variables, on écrit

$$z(t) = z_0 + z_v(t) = z_0 + u_v(t) + iv_v(t) \quad (4.44)$$

La flèche statique totale moyenne est ainsi donnée par

$$|U_0| = |U_s(1 + z_0 \frac{\Delta}{\pi k_0})| \quad (4.45)$$

La variation de z_0 en fonction de la vitesse de rotation est donnée par la figure 4.23.

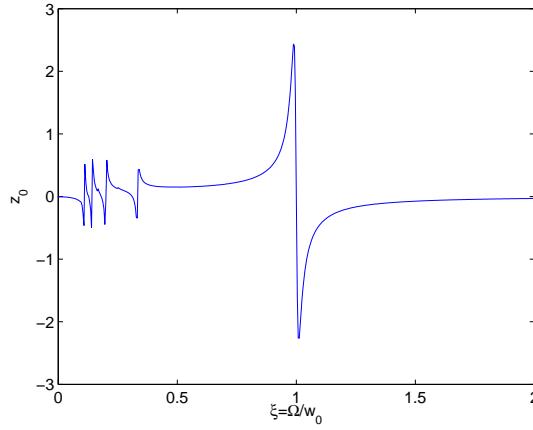


FIG. 4.23: Variation de z_0 en fonction de la vitesse de rotation, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $d=0.01$

L'examen du spectre d'amplitude de $u_v(t)$, cf. figure 4.22, montre la présence des harmoniques paires ($2\times, 4\times, 6\times \dots$) dont les effets n'étaient pas pris en compte dans le cas d'oscillateurs découplés présenté précédemment.

Lorsque $\xi \approx \frac{1}{N}$, l'harmonique d'ordre N atteint un niveau élevé par rapport aux autres harmoniques et on observe sur le spectre d'amplitude de $u_v(t)$ un pic au niveau de la fréquence $w = N\Omega$, cf. figure 4.28. L'orbite est composée de N boucles, cf. figure 4.25. Ainsi, au cours du démarrage ou de l'arrêt d'une machine tournante, l'enregistrement de résonances super-harmoniques en passant par des sous-multiples entiers de la vitesse critique et le changement de la forme de l'orbite (nombre de boucles) peut être un bon indicateur de l'existence de fissures.

Au-delà de la vitesse critique ($\xi > 1$), on peut se contenter de prendre $N = 1$, cf. figure 4.27, pour écrire

$$z(t) \approx \frac{U_s \Delta}{\pi k_0} (z_{-1} e^{-i\Omega t} + z_0 + z_1 e^{i\Omega t}) \quad (4.46)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{-1} = \frac{\frac{k_0 \pi}{\Delta}}{F(-1) \frac{k_0 \pi}{\Delta} - 3 \frac{\Delta}{k_0 \pi} - 3 \frac{\Delta}{k_0 \pi} \frac{F(-1)}{F(1)}}, z_0 = \frac{k_0 \pi}{\Delta} (F(-1) z_{-1} - 1), z_1 = 3 \frac{F(-1)}{F(1)} z_{-1} \\ F(-1) = 1 - \xi^2 - 2id\xi, F(1) = 1 - \xi^2 + 2id\xi \end{array} \right. \quad (4.47)$$

La flèche statique totale moyenne, $|U_0|$, croît remarquablement avec la perte de rigidité, mais elle est peu sensible aux variations de vitesse sauf pour des pertes de rigidité trop élevées, cf. figure 4.29(a). Quant au niveau vibratoire de la structure, cf. figure 4.29(b), Il

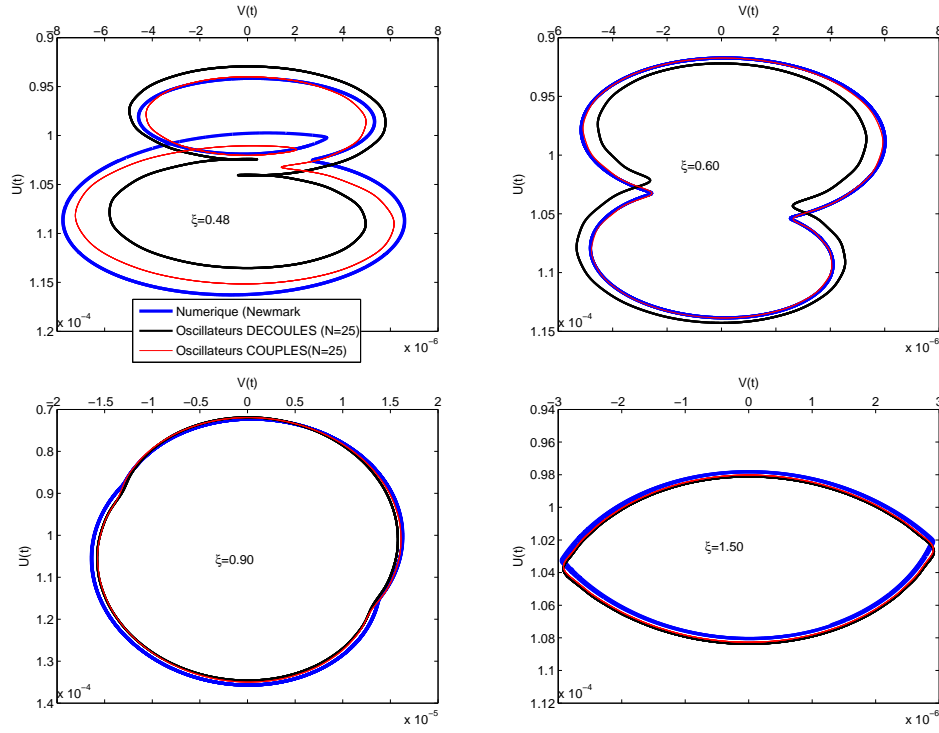


FIG. 4.24: Comparaison des orbites, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $d=0.05$

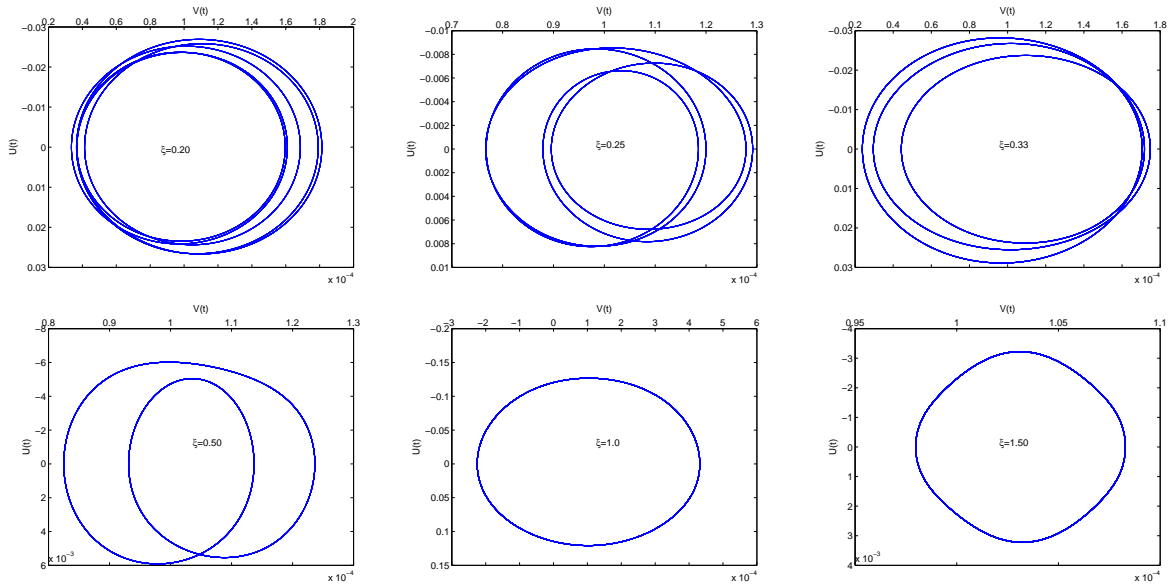


FIG. 4.25: Exemples d'orbites pour différentes valeurs de $\xi = \frac{\Omega}{w_0}$, $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$

croît avec la profondeur de la fissure ($\frac{\Delta}{k_0}$) et décroît avec la vitesse de rotation du rotor

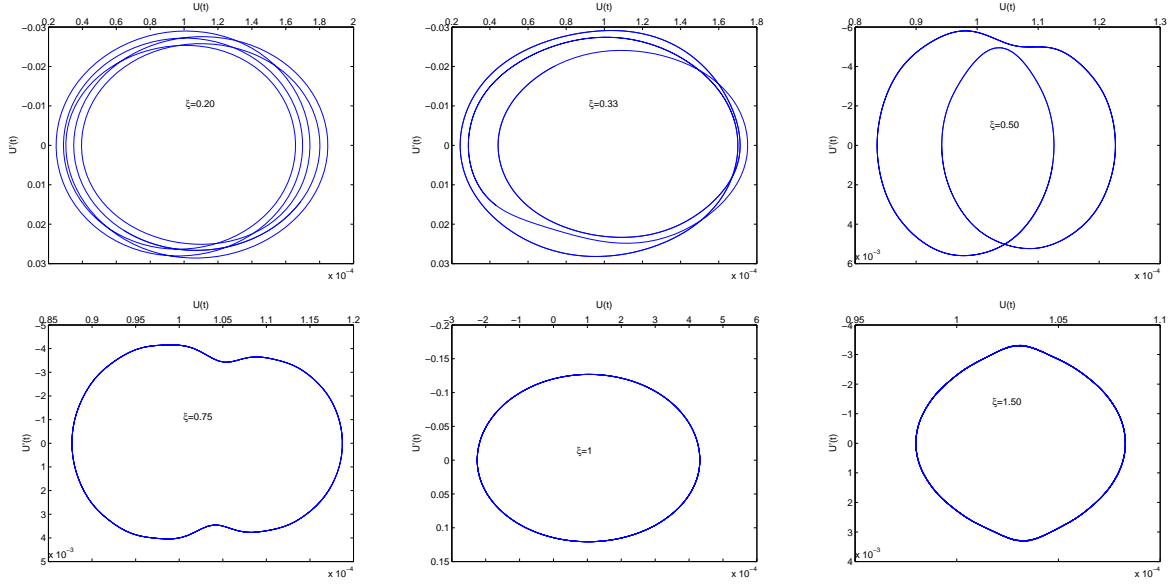


FIG. 4.26: Exemples de diagrammes de phases pour différentes valeurs de $\xi = \frac{\Omega}{w_0}, d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$

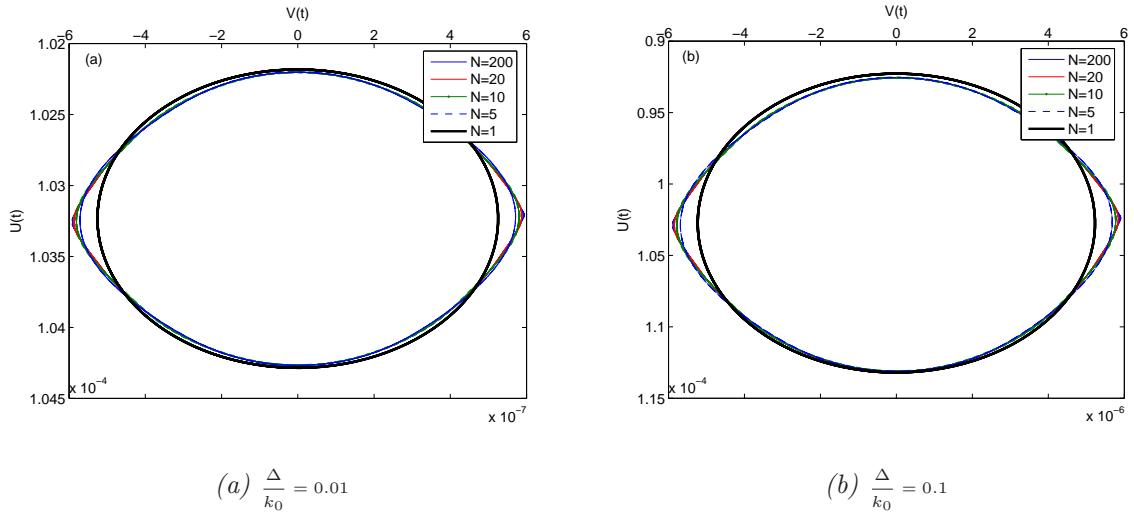


FIG. 4.27: Exemples d'orbites du système au-delà de la vitesse critique pour différentes valeurs de $N, \xi = 1.50, d=0.01$

(Ω). Un suivi continu de ces deux paramètres peut être de grande utilité pour détecter la présence de fissures ou leur propagation.

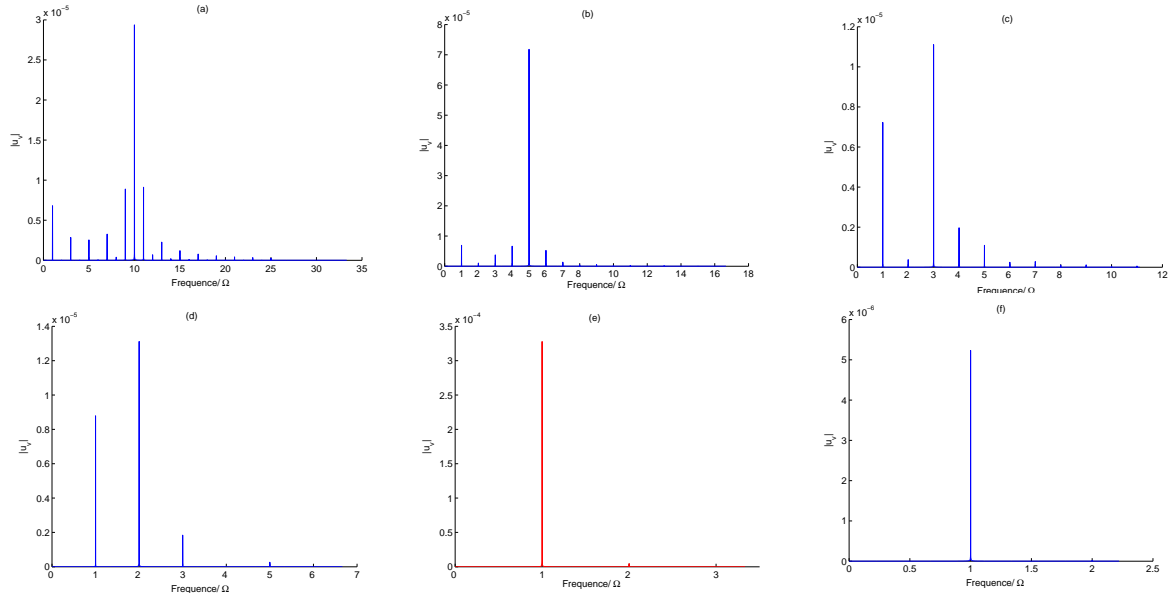
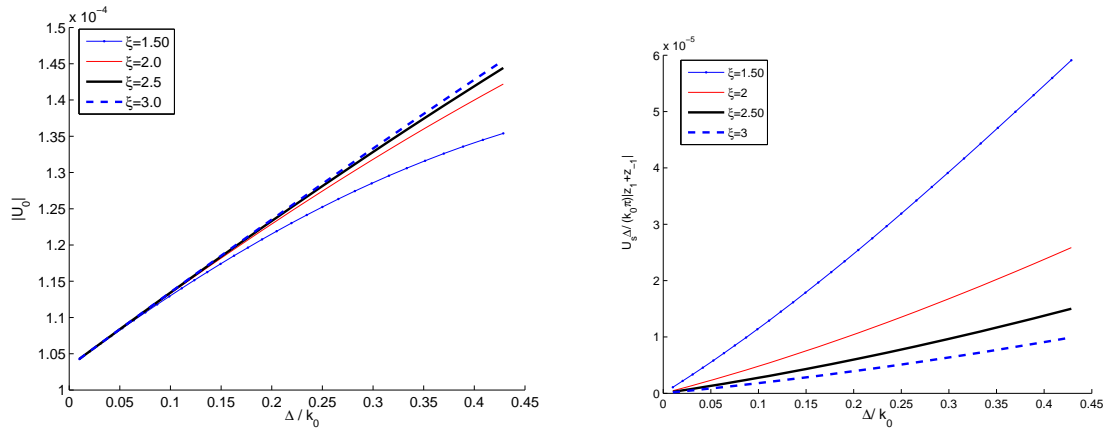


FIG. 4.28: Spectres d'amplitude de $u_v(t)$, (a) : $\xi = 0.10$, (b) : $\xi = 0.20$, (c) : $\xi = 0.30$, (d) : $\xi = 0.50$, (e) : $\xi = 1$, (f) : $\xi = 1.50$. $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$



(a) Variation de la flèche statique totale moyenne, $d=0.01$

(b) Variation du niveau vibratoire, $d=0$.

FIG. 4.29: Réponse du système au-delà de la vitesse critique

4.6 Réponse cyclique sous les hypothèses H_0 et H_3

4.6.1 Equations dynamiques

La rigidité globale du système s'écrit dans ce cas, cf. figure 4.30,

$$k(\varphi) = \begin{cases} K_0 + \Delta & \forall \varphi \in [0, \pi[\\ K_0 + \Delta + 2\Delta \sin \varphi & \forall \varphi \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \quad (4.48)$$

Contrairement à l'hypothèse (H_2) où la fissure est soit totalement ouverte soit totalement fermée, l'hypothèse (H_3) permet d'avoir une fissure partiellement ouverte. En exprimant

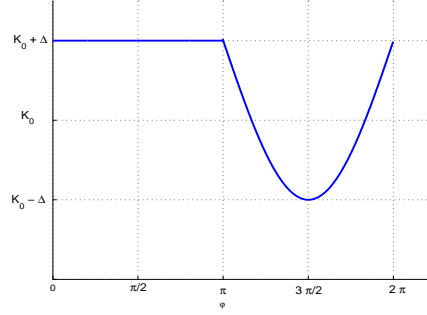


FIG. 4.30: Courbe de rigidité (H_3)

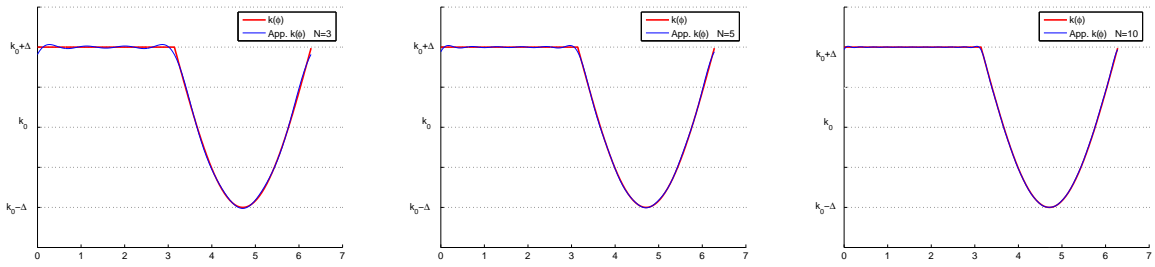


FIG. 4.31: Approximation de $k(\varphi)$ par série de Fourier

la fonction $k(\varphi)$ en série de Fourier, le système d'équations (4.8) conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + \left(k_0 + \Delta(1 - \cos \Omega t) - \frac{2\Delta}{\pi} + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 - 1)} \cos(2n\Omega t) \right) u(t) \\ \quad - \left(-\frac{\Delta}{2} \sin \Omega t + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(4n^2 - 1)} \sin(2n\Omega t) \right) v(t) \\ \quad = U_s \left(\frac{2\Delta}{\pi} - \Delta(1 - \cos \Omega t) - \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 - 1)} \cos(2n\Omega t) \right) \\ M_0 \ddot{v}(t) + D \dot{v}(t) + \left(k_0 + \Delta(1 - \cos \Omega t) - \frac{2\Delta}{\pi} + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 - 1)} \cos(2n\Omega t) \right) v(t) \\ \quad + \left(-\frac{\Delta}{2} \sin \Omega t + \frac{4\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(4n^2 - 1)} \sin(2n\Omega t) \right) u(t) \\ \quad = -\frac{4\Delta U_s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(4n^2 - 1)} \sin(2n\Omega t) + U_s \frac{\Delta}{2} \sin \Omega t \end{array} \right. \quad (4.49)$$

On se place dans le plan complexe et on pose de la même manière que précédemment

$z(t) = u(t) + iv(t)$. Le système d'équations (4.49) s'écrit alors

$$\begin{aligned} M_0 \ddot{z}(t) + D \dot{z}(t) + \left(k_0 + \Delta \left(1 - \left(\frac{3}{4} e^{i\Omega t} + \frac{1}{4} e^{-i\Omega t} \right) \right) + \frac{2\Delta}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{1+n}{4n^2-1} e^{i2n\Omega t} \right) z(t) \\ = \frac{U_s \Delta}{\pi} \left(-\pi \left(1 - \left(\frac{3}{4} e^{i\Omega t} + \frac{1}{4} e^{-i\Omega t} \right) \right) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{1+n}{4n^2-1} e^{i2n\Omega t} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

En considérant les solutions de la forme

$$z(t) = \frac{U_s \Delta}{\pi k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j e^{ij\Omega t} \quad (4.51)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{\Delta}{k_0} - (j\xi)^2 + 2ijd\xi \right) z_j e^{ij\Omega t} - \frac{\Delta}{k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j \left(\frac{3}{4} e^{i(1+j)\Omega t} + \frac{1}{4} e^{-i(1-j)\Omega t} \right) \\ + \frac{2\Delta}{\pi k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \frac{1+k}{4k^2-1} e^{i(2k+j)\Omega t} \\ = -\pi \left(1 - \frac{3}{4} e^{i\Omega t} - \frac{1}{4} e^{-i\Omega t} \right) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{1+n}{4n^2-1} e^{i2n\Omega t} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$\xi = \frac{\Omega}{w_0}$ désigne la fréquence d'excitation relative et $d = \frac{D}{2M_0 w_0}$ l'amortissement visqueux réduit.

4.6.2 Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs découplés

Lorsque $\Delta \ll k_0$, les termes de second ordre peuvent être négligés et l'équation (4.52) devient

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(1 - (j\xi)^2 + 2ijd\xi \right) z_j e^{ij\Omega t} = -\pi \left(1 - \frac{3}{4} e^{i\Omega t} - \frac{1}{4} e^{-i\Omega t} \right) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{1+n}{4n^2-1} e^{i2n\Omega t} \quad (4.53)$$

dont la solution est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{-1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 - \xi^2 - 2id\xi}; z_0 = 2 - \pi; z_1 = \frac{\frac{3\pi}{4}}{1 - \xi^2 + 2id\xi} \\ z_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{\frac{2(1+n)}{4n^2-1}}{1 - (2n\xi)^2 + 4nid\xi} \text{ pour } n \neq 0 \end{array} \right. \quad (4.54)$$

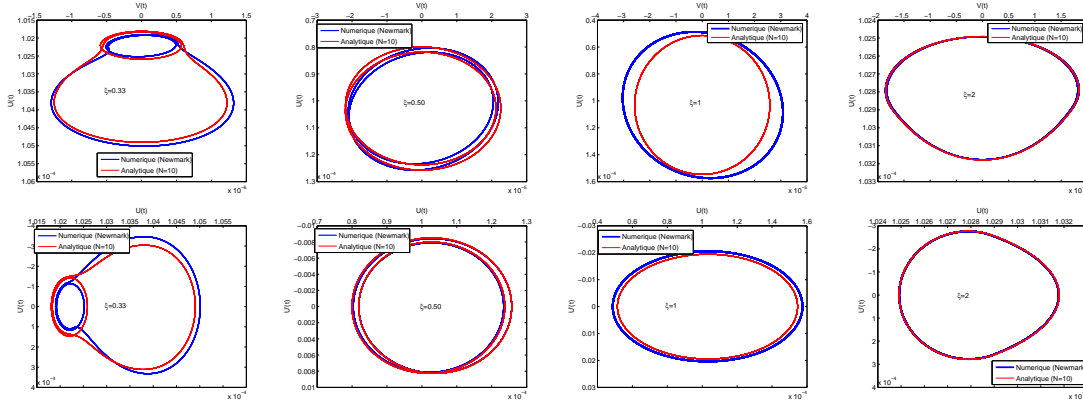


FIG. 4.32: Comparaison des résultats numériques et analytiques (orbites et diagrammes de phases), $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $d=0.01$

Pour des fissures peu profondes ($\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$), la solution (4.54), comparée aux résultats de l'intégration numérique de Newmark, est satisfaisante, cf. figure 4.32. Les harmoniques dont elle tient compte sont, outre la première, paires ($2\times, 4\times, 6\times, \dots$).

Lorsque la vitesse de rotation de l'arbre passe par des sous-multiples entiers et pairs de la vitesse critique ($\xi \approx 1/8, 1/6, 1/4, \dots$), l'examen de la réponse du système montre la présence de pics d'amplitude successifs résultant de résonances super-harmoniques, cf. figure 4.33.

Au-delà de la vitesse critique, la première harmonique est suffisante pour l'étude du système, cf. figure 4.34. La solution donnée par (4.54) montre alors que le niveau vibratoire décroît avec la vitesse de rotation et croît avec la profondeur de la fissure. La flèche statique moyenne totale croît avec $\frac{\Delta}{k_0}$, mais elle est insensible aux variations de la vitesse de rotation. Afin de distinguer le terme statique (z_0) des termes variables, on écrit

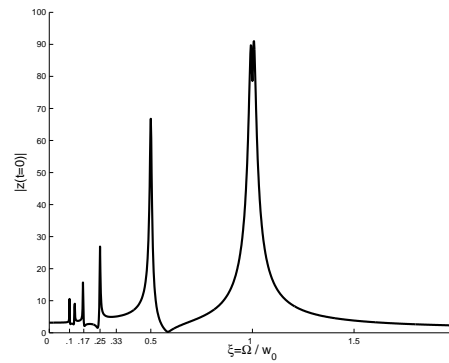


FIG. 4.33: Variations du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de rotation ($t=0$) : $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01, d=0.01$

$$z(t) = z_0 + z_v(t) = z_0 + u_v(t) + iv_v(t) \quad (4.55)$$

La flèche statique totale moyenne est ainsi donnée par

$$|U_0| = |U_s(1 + z_0 \frac{\Delta}{\pi k_0})| \quad (4.56)$$

La solution (4.54) ne permet pas de prendre en compte les harmoniques d'ordres impairs dont le niveau vibratoire ne peut être négligé lorsque la perte de rigidité est importante et que la vitesse de rotation est voisine d'un sous-multiple entier et impair ($\xi \approx \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \dots$), cf. figure 4.35. Pour mieux rendre compte du comportement vibratoire du système dans ces conditions, les termes de second ordre seront considérés dans le paragraphe suivant.

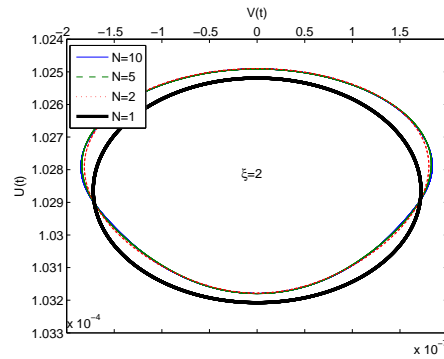


FIG. 4.34: Réponse du système au-delà de la vitesse critique pour différents nombres d'harmoniques (N), $\frac{\Delta}{k_0} = 0.01$, $d=0.01$

4.6.3 Etude des solutions périodiques : Cas des oscillateurs couplés

Le comportement vibratoire du système est décrit par l'équation (4.52) qu'on rappelle ci-dessous :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{\Delta}{k_0} - (j\xi)^2 + 2ij d \xi \right) z_j e^{ij\Omega t} - \frac{\Delta}{k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j \left(\frac{3}{4} e^{i(1+j)\Omega t} + \frac{1}{4} e^{-i(1-j)\Omega t} \right) \\ & + \frac{2\Delta}{\pi k_0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \frac{1+k}{4k^2-1} e^{i(2k+j)\Omega t} \\ & = -\pi \left(1 - \frac{3}{4} e^{i\Omega t} - \frac{1}{4} e^{-i\Omega t} \right) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{1+n}{4n^2-1} e^{i2n\Omega t} \end{aligned} \right. \quad (4.57)$$

L'approximation

$$z(t) \approx \frac{U_s \Delta}{\pi k_0} \sum_{n=-N}^{n=N} z_n e^{in\Omega t} \quad (4.58)$$

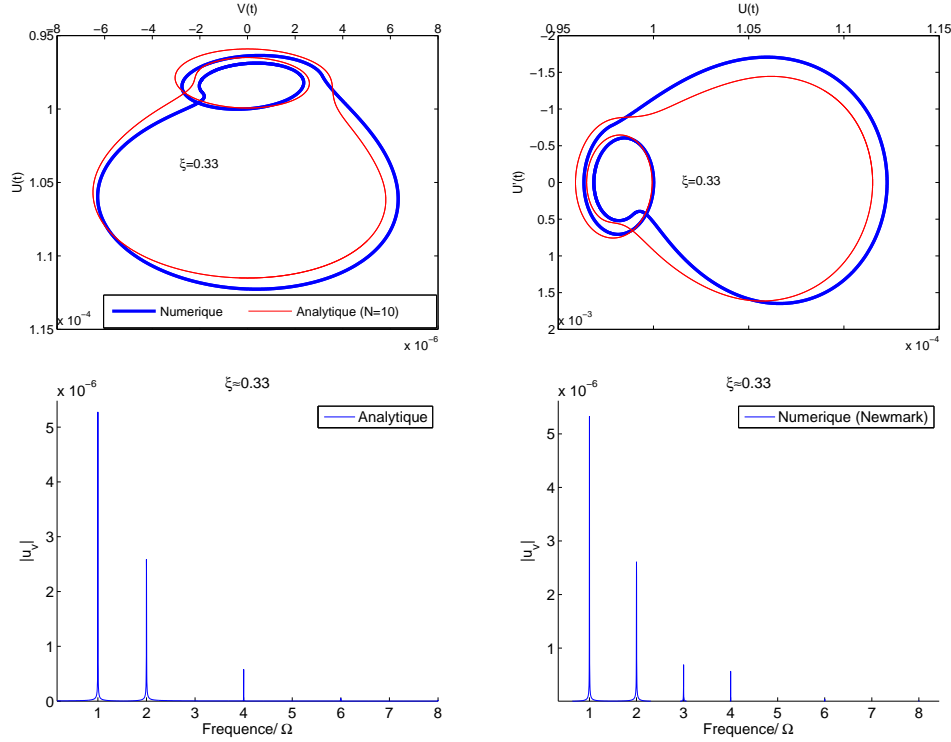


FIG. 4.35: Comparaison des résultats numériques (Newmark) et analytiques, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $\xi = 0.33, d=0.05$

consiste à considérer les N premières harmoniques. Comme le montrent les figures 4.36 et 4.37, seules les quelques premières sont d'effets significatifs.

Ainsi, l'équation (4.57), s'écrit

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=-N}^{j=N} \left(1 + \frac{\Delta}{k_0} - (j\xi)^2 + 2ijd\xi \right) z_j e^{ij\Omega t} - \frac{\Delta}{k_0} \sum_{j=-N}^{j=N} z_j \left(\frac{3}{4} e^{i(1+j)\Omega t} + \frac{1}{4} e^{-i(1-j)\Omega t} \right) \\ & + \frac{2\Delta}{\pi k_0} \sum_{j=-N}^{j=N} z_j \sum_{k=-N}^{k=N} (-1)^k \frac{1+k}{4k^2-1} e^{i(2k+j)\Omega t} \\ & = -\pi \left(1 - \frac{3}{4} e^{i\Omega t} - \frac{1}{4} e^{-i\Omega t} \right) - 2 \sum_{n=-N}^{n=N} (-1)^n \frac{1+n}{4n^2-1} e^{i2n\Omega t} \end{aligned} \right. \quad (4.59)$$

La solution de (4.59) comprend des composantes selon les harmoniques paires et impaires. Ces composantes atteignent des valeurs élevées lorsque la vitesse de rotation de l'arbre passe par des sous-multiples entiers de la vitesse critique. Des pics d'amplitude successifs sont alors enregistrés signes de passage par des résonances super-harmoniques, cf. figure 4.36.

4.6.3.1. Analyse et comparaison des résultats

La figure 4.38 montre que pour une même profondeur de fissure (mesurée par $\frac{\Delta}{k_0}$), l'hy-

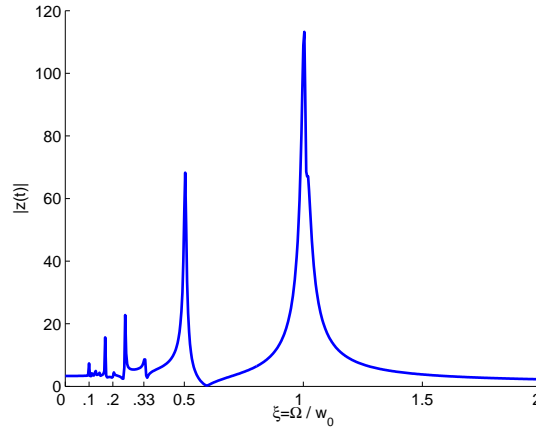


FIG. 4.36: Variations du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de rotation ($t=0$) : $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05, d=0.01$

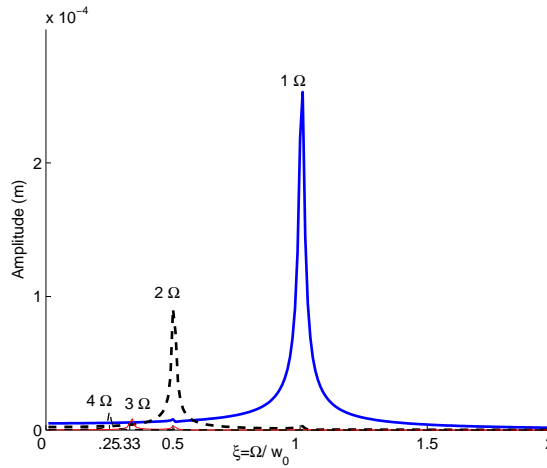


FIG. 4.37: Niveaux des premières harmoniques ; $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05, d=0.01$.

pothèse (H_3) conduit à une structure globalement plus rigide que celle de rigidité à deux niveaux (H_2) : la rigidité moyenne de la structure est $k_0 + \Delta - 2\frac{\Delta}{\pi}$. Dans le cadre de l'hypothèse (H_2), elle est égale à k_0 . On observe, comme dans le cadre de l'hypothèse (H_2), le phénomène de résonances super-harmoniques : lorsque $\xi \approx \frac{1}{N}$, l'harmonique d'ordre N atteint un niveau élevé par rapport aux autres harmoniques et on observe sur le spectre d'amplitude de $u_v(t)$ un pic au niveau de la fréquence $w = N\Omega$, cf. figure 4.43. L'orbite est composée de N boucles entrelacées, cf. figure 4.42.

Au-delà de la vitesse critique ($\xi > 1$), on peut se contenter de prendre $N = 1$, cf. figure

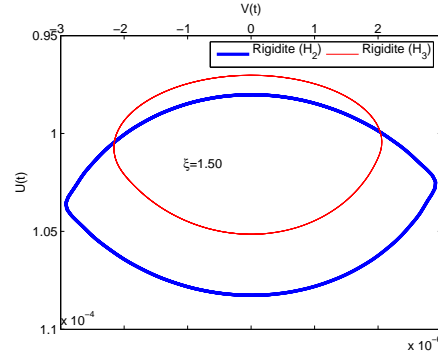


FIG. 4.38: *Comparaison des orbites pour les hypothèses (H_2) et (H_3) , $\xi = \frac{\Omega}{w_0} = 1.50$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $d=0.05$.*

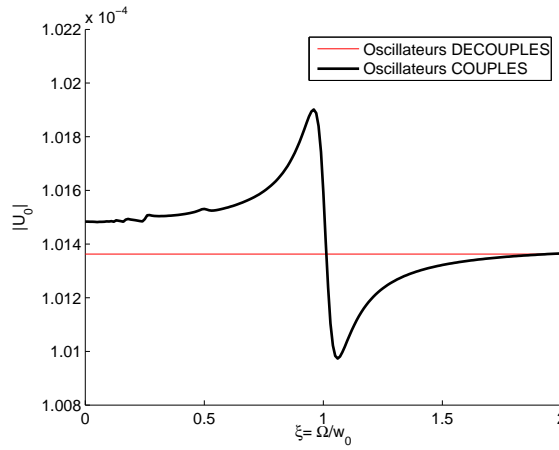


FIG. 4.39: *Flèche statique moyenne totale, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $d=0.05$.*

4.41, pour écrire

$$z(t) \approx \frac{U_s \Delta}{\pi k_0} (z_{-1} e^{-i\Omega t} + z_0 + z_1 e^{i\Omega t}) \quad (4.60)$$

La flèche statique totale moyenne, $|U_0|$, donnée par

$$|U_0| = |U_s (1 + z_0 \frac{\Delta}{\pi k_0})| \quad (4.61)$$

croît remarquablement avec la perte de rigidité, mais elle ne devient sensible aux variations de vitesse qu'en cas de fissures très profondes ($\frac{\Delta}{k_0} > 0.1$), cf. figure 4.44(a). Quant au niveau vibratoire de la structure, cf. figure 4.44(b), Il croît avec la profondeur de la fissure ($\frac{\Delta}{k_0}$) et décroît avec la vitesse de rotation du rotor (Ω). Un suivi continu de ces deux paramètres peut être d'une grande utilité pour détecter la présence de fissures ou leur propagation.

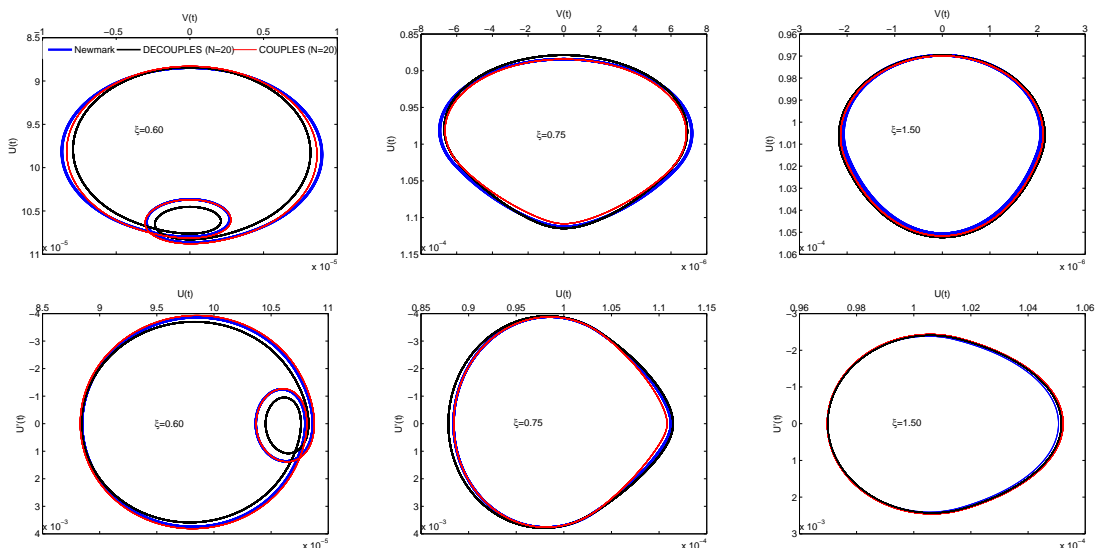


FIG. 4.40: Comparaison des orbites et diagrammes de phases, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $d=0.01$

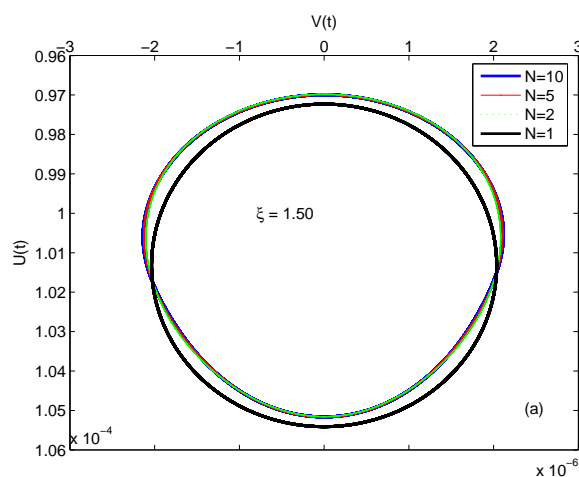


FIG. 4.41: Exemples d'orbites au-delà de la vitesse critique pour différentes valeurs de N , $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$, $\xi = 1.50$, $d=0.01$

4.7 Étude de stabilité : théorie de Floquet

On se propose ici d'examiner la stabilité des solutions périodiques du système dynamique régi par l'équation

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi)U(t) - \frac{1}{2}k'(\varphi)V(t) = m_2 g \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi)V(t) + \frac{1}{2}k'(\varphi)U(t) = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

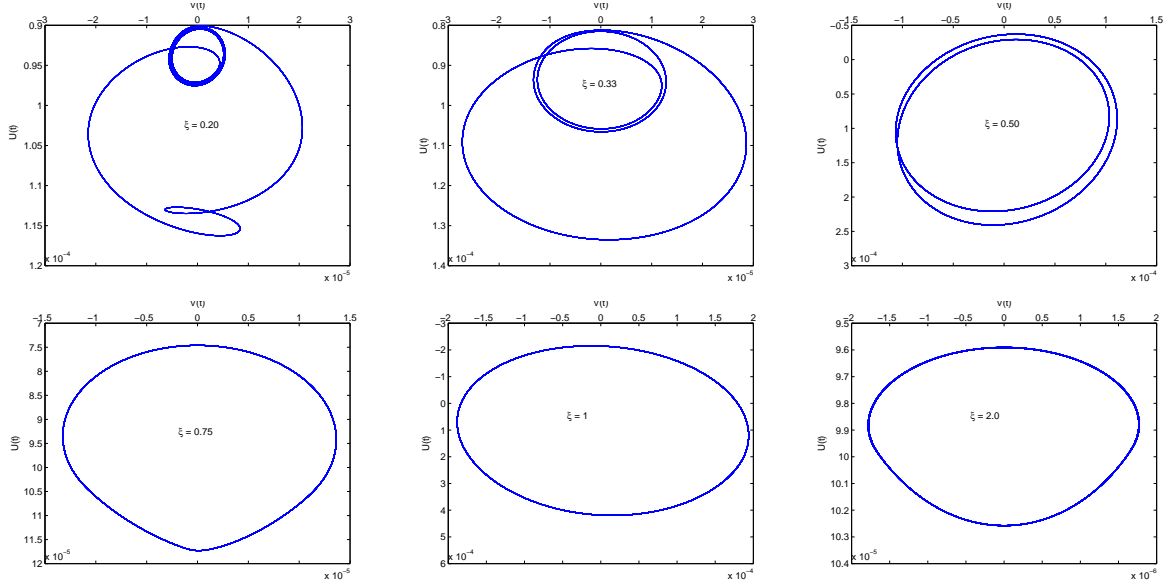


FIG. 4.42: Exemples d'orbites pour différentes valeurs de $\xi = \frac{\Omega}{w_0}$, $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.1$

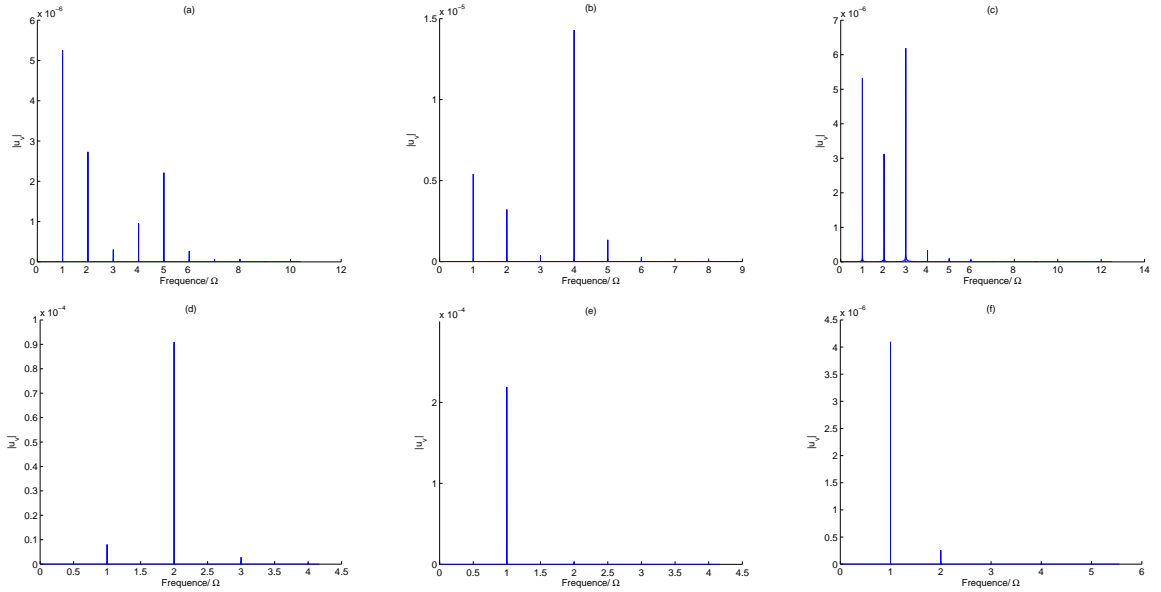


FIG. 4.43: Spectre d'amplitude de $u_v(t)$, (a) : $\xi = 0.20$, (b) : $\xi = 0.25$, (c) : $\xi = 0.33$, (d) : $\xi = 0.50$, (e) : $\xi = 1$, (f) : $\xi = 1.50$. $d=0.01$, $\frac{\Delta}{k_0} = 0.05$

Le système homogène est linéaire à coefficients périodiques. La théorie de Floquet permet de caractériser de tels systèmes [51]. Elle a été généralisée par Bloch au cas des équations aux dérivées partielles à coefficients périodiques [21]. Les solutions de ces équations sont connues sous le nom de *Ondes de Bloch* et forment la base de la théorie des électrons dans

les cristaux. Pour expliquer cette théorie, on va commencer par le cas de l'oscillateur à 1 ddl.

4.7.1 Oscillateur à un degré de liberté

On considère ici les systèmes gouvernés par l'équation de la forme

$$\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = 0 \quad (4.63)$$

où p_1 et p_2 sont deux fonctions périodiques de période T .

En introduisant la transformation

$$u = x \exp \left[-\frac{1}{2} \int p_1(t) dt \right] \quad (4.64)$$

l'équation (4.63) devient

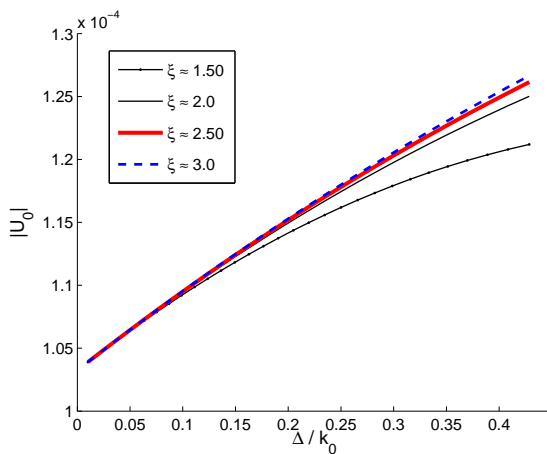
$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (4.65)$$

où

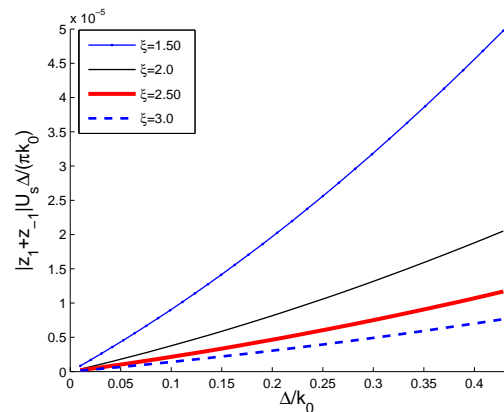
$$p(t) = p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t) - \frac{1}{2}\dot{p}_1(t)$$

Cette transformation est possible lorsque la fonction p_1 est différentiable. L'équation (4.65) est connue sous le nom de *l'équation de Hill* car elle a été discutée vers 1886 par Hill [70] dans le cadre de son étude sur le périgée lunaire. Lorsque

$$p(t) = \delta + 2\epsilon \cos 2t$$



(a) Variation de la flèche statique totale moyenne



(b) Variation du niveau vibratoire

FIG. 4.44: Réponse du système au-delà de la vitesse critique, $d=0.01$

l'équation (4.65) devient

$$\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)x = 0 \quad (4.66)$$

qui a été discutée par Mathieu dans son étude de la vibration d'une membrane elliptique et s'appelle, de ce fait, *l'équation de Mathieu* [82].

L'équation (4.63) est une équation différentielle de second ordre linéaire et homogène. Elle admet deux solutions linéaires, non nulles et indépendantes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ appelées *solutions fondamentales* [81]. Toute solution $u(t)$ de (4.63) est combinaison linéaire de $u_1(t)$ et $u_2(t)$, soit

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad (4.67)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes. Les fonctions p_1 et p_2 sont périodiques de période T , alors

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t+T) &= -p_1(t+T)\dot{u}(t+T) - p_2(t+T)u(t+T) \\ &= -p_1(t)\dot{u}(t+T) - p_2(t)u(t+T) \end{aligned} \quad (4.68)$$

$u_1(t+T)$ et $u_2(t+T)$ sont aussi deux solutions fondamentales de (4.63) et par suite

$$\begin{aligned} u_1(t+T) &= a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) \\ u_2(t+T) &= a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t) \end{aligned} \quad (4.69)$$

La matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ n'est pas unique, elle dépend des solutions fondamentales considérées.

Il existe, en particulier, des solutions fondamentales $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de (4.63) telles que

$$\begin{aligned} v_1(t+T) &= \lambda_1 v_1(t) \\ v_2(t+T) &= \lambda_2 v_2(t) \end{aligned} \quad (4.70)$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes pouvant être complexes. Ces solutions sont appelées *solutions normales* ou *de Floquet* [81]. $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont reliées à $v_1(t)$ et $v_2(t)$ par

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(t) \quad (4.71)$$

Les relations (4.69) et (4.71) conduisent à

$$\mathbf{v}(t+T) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}(t) \quad (4.72)$$

\mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices similaires et admettent, par conséquent, les mêmes valeurs propres. D'ailleurs, on peut choisir \mathbf{P} de façon à avoir \mathbf{B} sous sa forme la plus simple : la forme canonique de Jordan qui dépend des valeurs propres de \mathbf{A} solutions de

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (4.73)$$

Lorsque les solutions de (4.73) sont distinctes, \mathbf{B} est de la forme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

et (4.72) peut s'écrire sous la forme

$$v_i(t + T) = \lambda_i v_i(t) \quad i = 1 \text{ et } 2 \quad (4.75)$$

Il en résulte l'égalité suivante

$$v_i(t + nT) = \lambda_i^n v_i(t) \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.76)$$

et par suite, lorsque $t \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda_i| < 1 \\ \infty & \text{si } |\lambda_i| > 1 \end{cases} \quad (4.77)$$

Lorsque $\lambda_i = 1$, v_i est périodique de période T , cependant, quand $\lambda_i = -1$, v_i est périodique de période $2T$.

En multipliant (4.75) par $\exp(-\gamma_i(t + T))$ on écrit

$$\exp(-\gamma_i(t + T))v_i(t + T) = \lambda_i \exp(-\gamma_i T) \exp(-\gamma_i t) v_i(t) \quad (4.78)$$

Ainsi, en choisissant γ_i telle que $\lambda_i = \exp(\gamma_i T)$, l'équation (4.78) montre que $\phi_i(t) = \exp(-\gamma_i t) v_i(t)$ est une fonction T -périodique. Les solutions fondamentales $v_1(t)$ et $v_2(t)$ peuvent donc s'écrire

$$\begin{cases} v_1(t) = \exp(\gamma_1 t) \phi_1(t) \\ v_2(t) = \exp(\gamma_2 t) \phi_2(t) \end{cases} \quad (4.79)$$

où $\phi_i(t + T) = \phi_i(t)$.

Lorsque les valeurs propres de \mathbf{A} sont égales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), la forme canonique de Jordan de la matrice \mathbf{B} est

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

ou

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Le premier cas conduit à des solutions fondamentales pouvant être exprimées comme dans (4.79). Lorsque \mathbf{B} est de la forme (4.81),

$$v_1(t+T) = \lambda v_1(t) \quad (4.82a)$$

$$v_2(t+T) = \lambda v_2(t) + v_1(t) \quad (4.82b)$$

En raisonnant comme précédemment, $v_1(t)$ peut s'écrire

$$v_1(t) = \exp(\gamma t) \phi_1(t) \quad (4.83)$$

avec $\lambda = \exp(\gamma T)$ et $\phi_1(t+T) = \phi_1(t)$. Multiplions (4.82b) par $\exp(-\gamma(t+T))$ et utilisons (4.83) on obtient

$$\exp(-\gamma(t+T))v_2(t+T) = \exp(-\gamma t)v_2(t) + \frac{1}{\lambda}\phi_1(t) \quad (4.84)$$

soit,

$$v_2(t) = \exp(\gamma t) \left[\phi_2(t) + \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \right] \quad (4.85)$$

avec $\phi_2(t+T) = \phi_2(t)$.

Les résultats établis ci-dessus montrent que lorsque \mathbf{B} est de la forme (4.74) ou (4.80), la réponse de l'oscillateur est bornée lorsque les parties réelles de γ_1 et de γ_2 sont négatives. De même, lorsque \mathbf{B} est de la forme (4.81), la réponse reste bornée quand la partie réelle de γ est négative. Le paramètre γ est appelé *exposant caractéristique* et est relié à λ par

$$\gamma = \frac{1}{T} \ln(\lambda) \quad \text{mod}(2in\pi T^{-1}), n \in \mathbb{N}$$

Pour montrer comment déterminer les exposants caractéristiques, on considère $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les solutions fondamentales de (4.63) vérifiant

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1 & \dot{u}_1(0) &= 0 \\ u_2(0) &= 0 & \dot{u}_2(0) &= 1 \end{aligned} \quad (4.86)$$

En tenant compte de (4.69), on obtient

$$u_1(T) = a_{11} \text{ et } u_2(T) = a_{21} \quad (4.87)$$

Ensuite, en dérivant (4.69) par rapport à t et en utilisant (4.87), on obtient

$$\dot{u}_1(T) = a_{12} \text{ et } \dot{u}_2(T) = a_{22} \quad (4.88)$$

Les exposants caractéristiques sont solutions de l'équation (4.73) qui s'écrit

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \Delta = 0 \quad (4.89)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(u_1(T) + \dot{u}_2(T) \right) \text{ et } \Delta = u_1(T)\dot{u}_2(T) - \dot{u}_1(T)u_2(T)$$

Δ est le wronskien de $u_1(T)$ et $u_2(T)$. La résolution de (4.89) permet de déterminer λ_1 et λ_2 , ensuite, les exposants caractéristiques sont calculés par

$$\gamma = \frac{1}{T} \ln(\lambda)$$

Dans le cas de l'équation de Hill, le wronskien est égal à 1. Comme $u_1(t)$ et $u_2(t)$ solutions de (4.63), on a

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + p(t)u_1 &= 0 \\ \ddot{u}_2 + p(t)u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

par suite

$$u_2 \left(\ddot{u}_1 + p(t)u_1 \right) - u_1 \left(\ddot{u}_2 + p(t)u_2 \right) = 0$$

et finalement, on obtient l'équation

$$u_1\ddot{u}_2 - u_2\ddot{u}_1 = 0 \quad (4.91)$$

dont l'intégration conduit à

$$\Delta(t) = u_1(t)\dot{u}_2(t) - u_2(t)\dot{u}_1(t) = \text{constante} \quad (4.92)$$

On vérifie qu'à $t = 0$, on a $\Delta(0) = 1$. Dans ce cas, les racines de (4.89) sont données par

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (4.93)$$

Ces solutions sont reliées par

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 \quad (4.94)$$

Lorsque $|\alpha| > 1$, l'une des racines est de valeur absolue supérieure à 1 et par suite l'une des solutions normales n'est pas bornée. Cependant, lorsque $|\alpha| < 1$, les deux racines sont complexes conjuguées de modules égaux à 1 (car $\lambda_1\lambda_2 = 1$) et par suite, les deux solutions normales sont bornées. Le passage des solutions stables aux solutions instables se produit au niveau de $|\alpha| = 1$.

Dans le cas de l'équation de Mathieu, $\alpha = \alpha(\delta, \epsilon)$. Les valeurs de δ et ϵ pour lesquelles $|\alpha| > 1$ s'appellent *valeurs instables* [89], celles pour lesquelles $|\alpha| = 1$ s'appellent *valeurs de transition*. La courbe reliant les valeurs de transition divise le plan $(\epsilon\delta)$ en régions stables et régions instables. Le long de cette courbe, au moins une des solutions normales est périodique de période π ou 2π . La figure 4.45 s'appelle *diagramme de Strutt* [89].

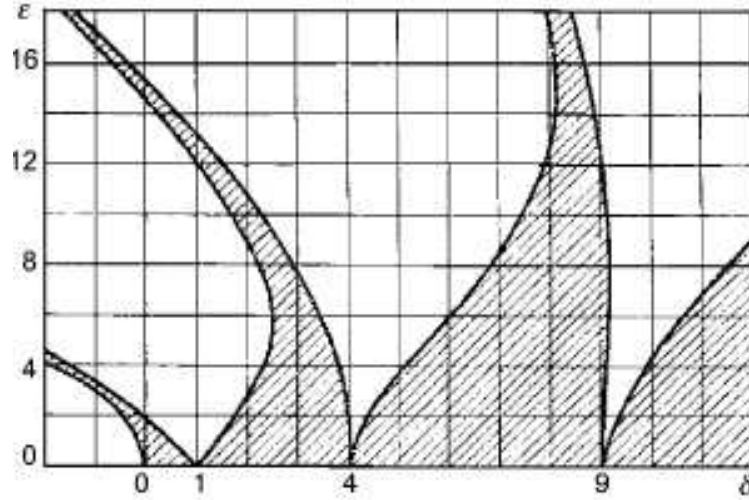


FIG. 4.45: Régions stables (hachurées) et instables pour l'équation de Mathieu [28]

4.7.2 Oscillateur à plusieurs degrés de liberté

La dynamique des systèmes à plusieurs degrés de liberté a été traitée dans plusieurs ouvrages [89, 55, 19]. Cette section est relative à un rappel sur l'application de la méthode de Floquet aux systèmes à plusieurs ddl décrit par l'équation

$$\ddot{x}_n + \sum_{m=1}^N f_{nm} x_m = 0 \quad (4.95)$$

où $f_{nm}(t + T) = f_{nm}(t)$. Il est intéressant d'écrire le système (4.95) sous la forme d'un système à $2N$ équations différentielles de premier ordre en définissant

$$\begin{aligned} u_n &= x_n, & n &= 1, 2, \dots, N \\ u_n &= \dot{x}_n, & n &= N + 1, 2, \dots, 2N \end{aligned} \quad (4.96)$$

Le système d'équations (4.95) devient

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &= u_{N+n}, & n &= 1, 2, \dots, N \\ \dot{u}_{N+n} &= -\sum_{m=1}^N f_{nm} u_m, & n &= N + 1, 2, \dots, 2N \end{aligned} \quad (4.97)$$

soit, sous une forme plus compacte

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{u} \quad (4.98)$$

où \mathbf{u} est un vecteur de composantes u_1, u_2, \dots, u_{2N} et $\mathbf{F}(t)$ est une matrice $2N \times 2N$ telle que $\mathbf{F}(t + T) = \mathbf{F}(t)$. On se propose de rappeler le comportement des solutions du système d'équations de la forme (4.98).

On définit, pour le système (4.98) un ensemble de solutions fondamentales

$$u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{mk}, \quad k = 1, 2, \dots, M = 2N \quad (4.99)$$

qui peut être mis sous la forme d'une matrice \mathbf{U} appelée *matrice solution fondamentale* et donnée par

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{M1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{M2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1M} & u_{2M} & \dots & u_{MM} \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Il est évident que \mathbf{U} vérifie l'équation matricielle

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{U} \quad (4.101)$$

La matrice \mathbf{F} est T -périodique, elle vérifie $\mathbf{F}(t+T) = \mathbf{F}(t)$. Ainsi, $\mathbf{U}(t+T)$ est aussi une matrice solution fondamentale reliée à $\mathbf{U}(t)$ par

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}(t) \quad (4.102)$$

où \mathbf{A} est une matrice $M \times M$ constante et inversible. On introduit la relation $\mathbf{U}(t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}(t)$, où \mathbf{P} est une matrice $M \times M$ constante et inversible. L'équation (4.102) devient

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}(t) \quad (4.103)$$

Comme dans le cas du système à un ddl, on choisit \mathbf{P} pour que \mathbf{B} se mette sous sa forme canonique de Jordan qui dépend des valeurs propres de \mathbf{A} solutions de

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (4.104)$$

Lorsque les λ_i sont distincts, \mathbf{B} est de la forme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

et par suite l'équation (4.103) conduit à

$$\mathbf{v}_i(t+T) = \lambda_i \mathbf{v}_i(t) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M \quad (4.106)$$

\mathbf{v}_i désigne un vecteur solution de composantes $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iM}$. Après n périodes, (4.106) conduit à

$$\mathbf{v}_i(t + nT) = \lambda_i^n \mathbf{v}_i(t) \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.107)$$

Par conséquent, lorsque $t \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$),

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda_i| < 1 \\ \infty & \text{si } |\lambda_i| > 1 \end{cases} \quad (4.108)$$

Lorsque $\lambda_i = 1$, \mathbf{v}_i est T -périodique, cependant, pour $\lambda_i = -1$, \mathbf{v}_i est $2T$ -périodique.

En multipliant (4.106) par $\exp(-\gamma_i(t + T))$ où γ_i est défini par $\lambda_i = \exp(\gamma_i T)$, on obtient

$$\exp(-\gamma_i(t + T)) \mathbf{v}_i(t + T) = \exp(-\gamma_i t) \mathbf{v}_i(t) \quad (4.109)$$

Il s'en suit que $\exp(-\gamma_i t) \mathbf{v}_i(t)$ est T -périodique et par conséquent $\mathbf{v}_i(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{v}_i(t) = \exp(\gamma_i t) \phi_i(t) \quad (4.110)$$

où $\phi_i(t + T) = \phi_i(t)$.

Lorsque les solutions de (4.104) ne sont pas distinctes, \mathbf{B} ne peut, en général, être réduite à une matrice diagonale, mais elle peut s'écrire sous la forme de Jordan

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{B}_n \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

où

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_q \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_{q+i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_{q+i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}$$

Ainsi, \mathbf{B}_0 contient les valeurs propres distinctes et \mathbf{B}_i contient celles d'ordres de multiplicité supérieurs à 1. Si on désigne par s_i l'ordre de multiplicité de λ_{q+i} , \mathbf{B}_i est de taille $s_i \times s_i$. Les s_i vérifient $s_0 + s_1 + \dots + s_n = M$.

En tenant compte de (4.103), on écrit

$$v_1(t + T) = \lambda_1 v_1(t) \quad (4.112a)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_q(t+T) = \lambda_q \mathbf{v}_q(t) \quad (4.112b)$$

$$\mathbf{v}_{q+1}(t+T) = \lambda_{q+1} \mathbf{v}_{q+1}(t) \quad (4.112c)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_{q+s_1}(t+T) = \lambda_{q+1} \mathbf{v}_{q+s_1}(t) + \mathbf{v}_{q+s_1-1}(t) \quad (4.112d)$$

$$\mathbf{v}_{q+s_1+1}(t+T) = \lambda_{q+2} \mathbf{v}_{q+s_1+1}(t) \quad (4.112e)$$

$$\mathbf{v}_{q+s_1+2}(t+T) = \lambda_{q+2} \mathbf{v}_{q+s_1+2}(t) + \mathbf{v}_{q+s_1+1}(t) \quad (4.112f)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_{q+s_2}(t+T) = \lambda_{q+2} \mathbf{v}_{q+s_2}(t) + \mathbf{v}_{q+s_2-1}(t) \quad (4.112g)$$

$$\vdots$$

et par suite, pour $n = 1, 2, \dots, s_k$, on a

$$\mathbf{v}_k(t) = \exp(\gamma_k t) \phi_k(t) \quad (4.113a)$$

$$\mathbf{v}_{k+1}(t) = \exp(\gamma_k t) \left(\phi_{k+1}(t) + \frac{t}{T \lambda_k} \phi_k(t) \right) \quad (4.113b)$$

$$\mathbf{v}_{k+2}(t) = \exp(\gamma_k t) \left(\phi_{k+2}(t) + \frac{t}{T \lambda_k} \phi_{k+1}(t) + \frac{t(t-T)}{2T^2 \lambda_k^2} \phi_k(t) \right) \quad (4.113c)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+n}(t) &= \exp(\gamma_k t) \left(\phi_{k+n}(t) + \frac{t}{T \lambda_k} \phi_{k+n-1}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t(t-T)}{2T^2 \lambda_k^2} \phi_{k+n-2}(t) + \dots + \frac{t(t-T) \dots (t+T-nT)}{n! T^n \lambda_k^n} \phi_k(t) \right) \end{aligned} \quad (4.113d)$$

où

$$\phi_{k+j}(t+T) = \phi_{k+j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, s_k$$

Puisque $\gamma_k = \frac{1}{T} \ln(\lambda_k)$, lorsque $t \rightarrow \infty$, les solutions $\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_{k+s_k}$ sont,

$$\begin{cases} \text{bornées} & \text{si } |\lambda_k| < 1 \\ \text{non bornées} & \text{si } |\lambda_k| > 1 \end{cases} \quad (4.114)$$

Afin de déterminer les valeurs propres et par suite les exposants caractéristiques de l'équation (4.98), on peut calculer numériquement un ensemble de solutions fondamentales de (4.101) en utilisant les conditions initiales $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$. Ensuite, on détermine la matrice \mathbf{A} par $\mathbf{A} = \mathbf{U}(T)$. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont enfin déduites de la résolution de l'équation caractéristique (4.104).

4.7.3 Application au système dynamique à 2 ddl

On considère le système dynamique à 2 ddl sous les hypothèses H_0 et H_3 données par

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi)U(t) - \frac{1}{2}k'(\varphi)V(t) = m_2 g \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi)V(t) + \frac{1}{2}k'(\varphi)U(t) = 0 \end{cases} \quad (4.115)$$

La variation de rigidité est décrite par la fonction continue et 2π -périodique

$$k(\varphi) = \begin{cases} K_0 + \Delta & \forall \varphi \in [0, \pi[\\ K_0 + \Delta + 2\Delta \sin \varphi & \forall \varphi \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \quad (4.116)$$

Le système différentiel homogène associé à (4.115)

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi)U(t) - \frac{1}{2}k'(\varphi)V(t) = 0 \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi)V(t) + \frac{1}{2}k'(\varphi)U(t) = 0 \end{cases} \quad (4.117)$$

est de second ordre, linéaire et à coefficients périodiques. La théorie de Floquet permet d'examiner la stabilité linéaire des solutions périodiques et fournit les courbes de transitions présentées dans le plan $(\frac{\Omega}{w_s}, \frac{\Delta}{k_s})$, cf. figure 4.46. $k_s = k_0 + \Delta$ et $w_s = \sqrt{\frac{k_s}{M_0}}$ désignent la rigidité et la fréquence propre de la structure non fissurée, respectivement. Pour chaque couple $(\frac{\Omega}{w_s}, \frac{\Delta}{k_s})$, on calcule la réponse du système dynamique après une période $T = \frac{1}{\Omega}$ par intégration numérique utilisant la méthode de l'accélération moyenne de Newmark.

La matrice de Floquet \mathbf{A} recherchée vérifie

$$\begin{pmatrix} U(T) \\ V(T) \\ \dot{U}(T) \\ \dot{V}(T) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \\ \dot{U}(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

Ainsi, la détermination de \mathbf{A} nécessite le calcul, pour chacun des ensembles de conditions initiales

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \\ \dot{U}(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \\ \dot{U}(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \\ \dot{U}(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \\ \dot{U}(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de la réponse du système dynamique après une période T .

La même démarche a été, ensuite, appliquée au système

$$\begin{cases} M_0 \ddot{U}(t) + D \dot{U}(t) + k(\varphi)U(t) - \frac{1}{2}k'(\varphi)V(t) = 0 \\ M_0 \ddot{V}(t) + D \dot{V}(t) + k(\varphi)V(t) + \frac{1}{2}k'(\varphi)U(t) = 0 \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t \end{cases} \quad (4.119)$$

La figure 4.47 montre que l'approximation

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t$$

conduit à un système mécanique plus rigide caractérisé par des zones d'instabilité plus réduites que celle du système (4.117).

De même, en présence d'amortissements visqueux, le domaine d'instabilité est réduit et se trouve tout entier contenu dans la zone définie en l'absence d'amortissement. Un seuil d'excitation fini est désormais nécessaire pour déstabiliser le système dynamique même à la résonance exacte.

L'instabilité peut se produire à des vitesses de rotation sous-critiques, au voisinage de la vitesse de rotation critique et même pour des vitesses surcritiques.

Le premier cas d'instabilité correspond au passage du rotor par des vitesses de rotation égales à des sous-multiples de sa vitesse critique et se manifeste par le phénomène de résonance super-harmonique décrit précédemment. La seconde zone d'instabilité est voisine de la résonance exacte ($\frac{\Omega}{w_s} \approx 1$) qui correspond à des niveaux vibratoires élevés atteint par l'harmonique principale ($1\times$). Reste à expliquer la troisième zone d'instabilité qui se concentre, pour $d \approx 5\%$, au voisinage de $\frac{\Omega}{w_s} = 2$.

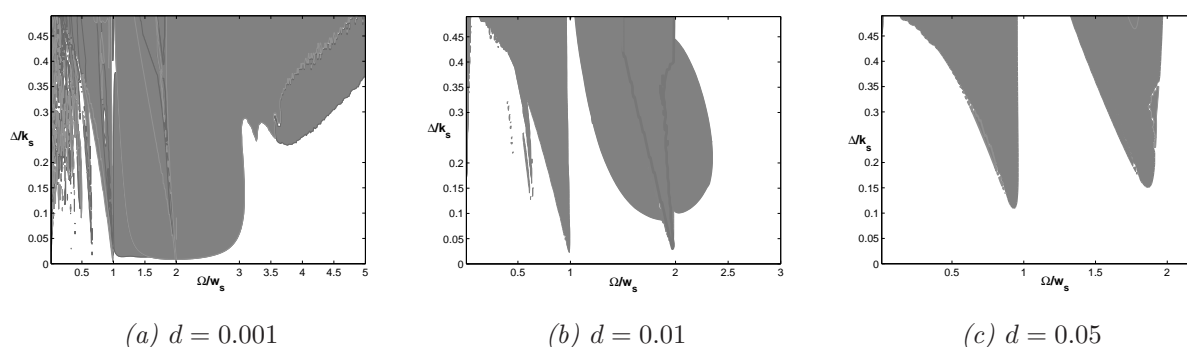


FIG. 4.46: Système à 2 ddl sous les hypothèses H_0 et H_3 : régions stables et instables (colorées).

Les points des courbes de transitions correspondent à des valeurs propres de la matrice de Floquet de module égal à 1. Dans le plan complexe, ces points sont situés sur le cercle unité. Les paramètres de contrôle du système dynamique sont la perte de rigidité mesurée par Δ et la vitesse de rotation de l'arbre Ω . Par variation continue de ces paramètres, la solution périodique change peu à peu : il en va naturellement de même de la matrice de Floquet et de ses valeurs propres. La perte de stabilité de la solution périodique, qui se traduit par une bifurcation, survient au moment où la variation des paramètres amène l'une des valeurs propres de la matrice de Floquet à sortir du cercle unité. Il existe trois types de croisement du cercle unité indiqués sur la figure 4.48 : par $(+1)$, par (-1) et par deux valeurs propres

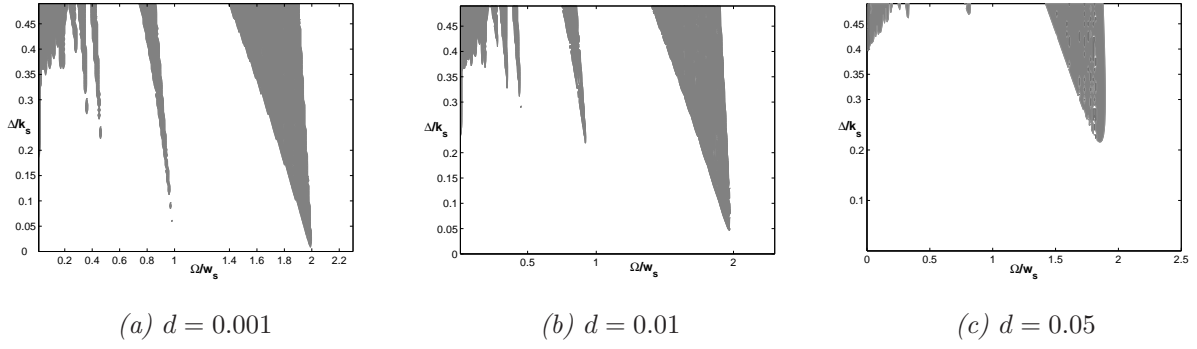


FIG. 4.47: Solution approchée pour le système à 2 ddl sous les hypothèses H_0 et H_3 : régions stables et instables (colorées).

complexes conjuguées ($\alpha \mp i\beta$). Outre la perte de stabilité, chacun de ces types de croisement a, sur le comportement ultérieur du système dynamique, des conséquences qui dépendent des non-linéarités et sont étroitement liées aux bifurcations mises en jeu [19].

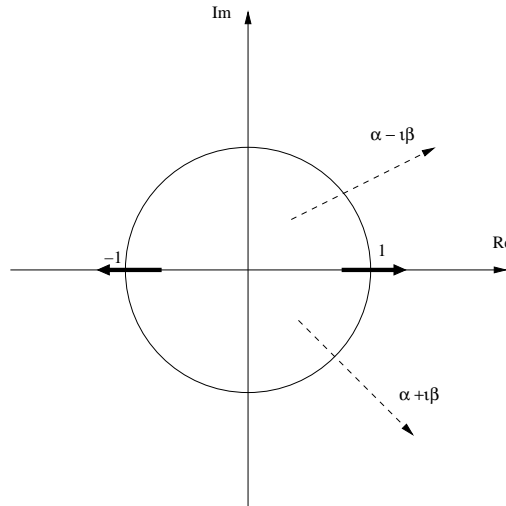


FIG. 4.48: Cercle unité et différents scénarios de perte de la stabilité linéaire

On considère la réponse du système dynamique (4.117) à la vitesse de rotation $\Omega = 1.7w_s$ et $d = 0.05$. A cette vitesse de rotation, le point de bifurcation situé sur la courbe de transition est atteint en $\frac{\Delta}{k_s} = r_c \approx 0.2274$. A cette valeur critique, la traversée du cercle unité se fait par (-1) comme le montre la figure 4.49. Les flèches indiquent le sens le parcours des courbes lorsque $\frac{\Delta}{k_s}$ croît. On voit bien que c'est λ_3 qui traverse le cercle unité par (-1) , ensuite λ_1 , cf. figure 4.49.

Au-delà de r_c , la perte de stabilité linéaire conduit à une solution périodique stable, de période $(\frac{2}{\Omega})$ deux fois plus longue que celle de l'excitateur $(\frac{1}{\Omega})$, cf. figure 4.51. On est alors

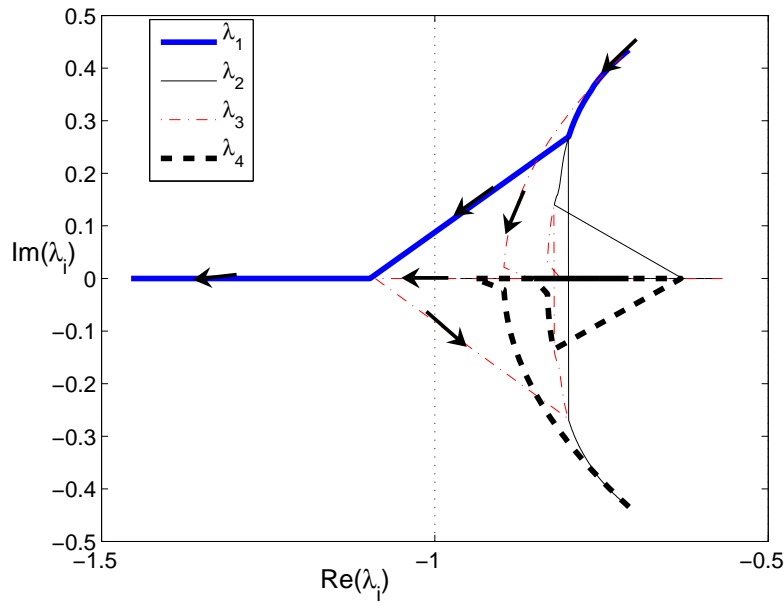


FIG. 4.49: Variations des valeurs propres de la matrice de Floquet, $\frac{\Omega}{w_s} = 1.70$, $d=0.05$

en présence d'une bifurcation sous-harmonique normale [19, 88]. Il convient donc de parler d'instabilité sous-harmonique de la solution périodique. La nouvelle solution de fréquence $\frac{\Omega}{2}$ (de période $\frac{2}{\Omega}$) pourrait à son tour voir sa stabilité mise en cause par une fréquence moitié, soit $\frac{\Omega}{4}$ (de période $\frac{4}{\Omega}$). Et ainsi de suite. En d'autres termes, la variation appropriée d'un paramètre de contrôle (ici Δ) doit permettre, en principe, la mise en évidence de toute une série d'instabilités sous-harmoniques, donnant successivement naissance aux solutions de période $\frac{2}{\Omega}$, $\frac{4}{\Omega}$, $\frac{8}{\Omega}$, ... En ce cas on parle d'une cascade de bifurcation sous-harmonique ou *cascade sous-harmonique*, dont chaque étape s'accompagne de la division par 2 de la fréquence, c'est à dire du *doublément de la période* [19, 88]. La cascade sous-harmonique est bien l'un des modes de transition vers le chaos. Une description plus détaillée de ce phénomène a été présentée dans plusieurs ouvrages spécialisés dont celui de Bergé et al. [19] et ceux de Nayfeh et al. [89, 88].

Dans le spectre de Fourier de la réponse du système dynamique, au-delà de r_c , on note l'apparition de la fréquence $\frac{\Omega}{2}$ et de ses harmoniques impaires ($\frac{3\Omega}{2}$, $\frac{5\Omega}{2}$, etc.). Le niveau vibratoire augmente remarquablement avec la perte de rigidité, cf. figure 4.51.

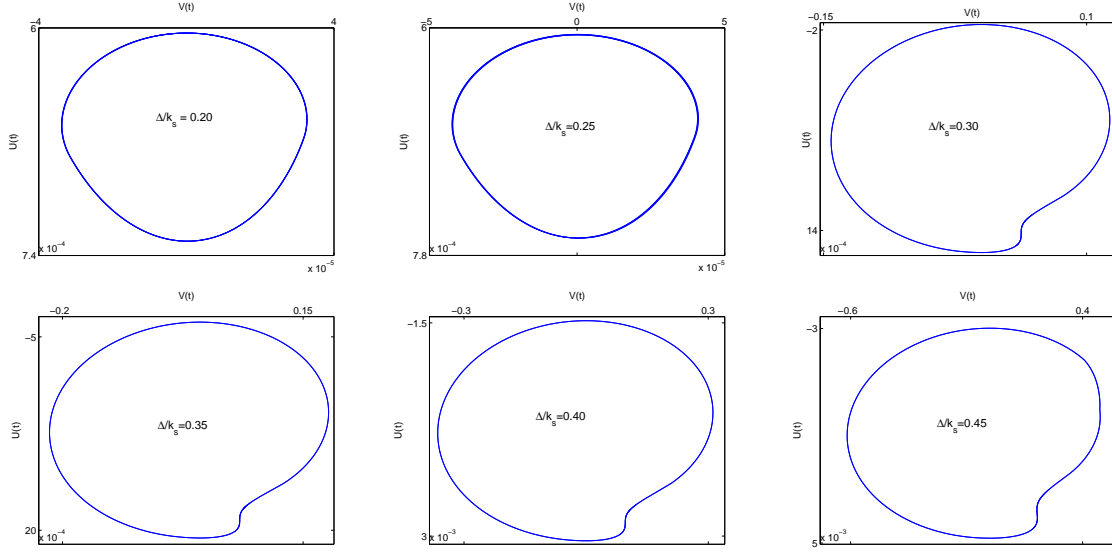


FIG. 4.50: Exemples d'orbites, $\frac{\Omega}{w_s} = 1.70$, $d=0.05$

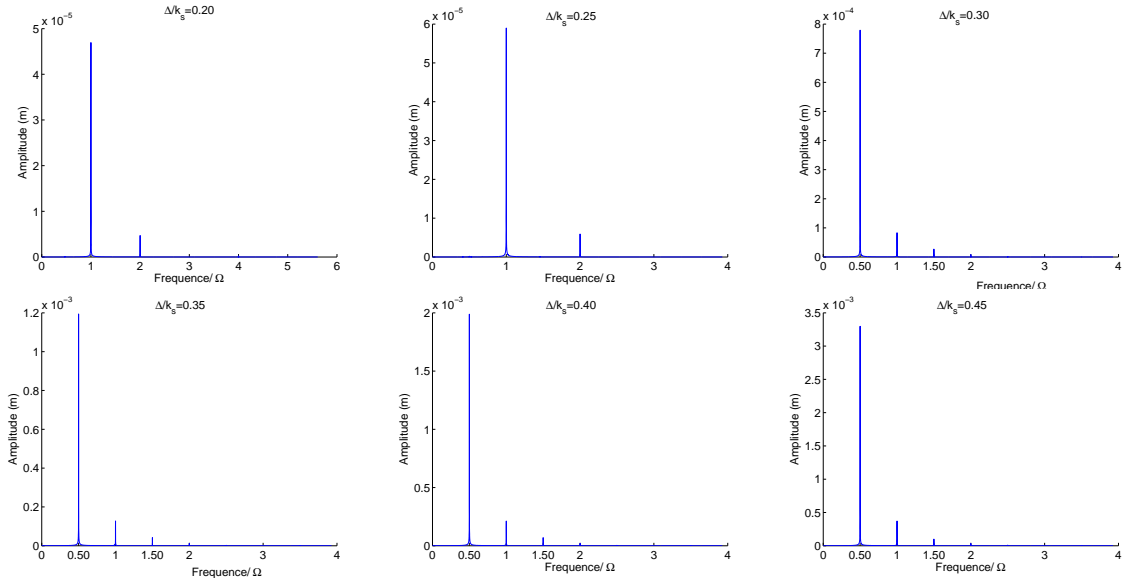


FIG. 4.51: Exemples de spectres d'amplitude, $\frac{\Omega}{w_s} = 1.70$, $d=0.05$

4.8 Conclusions

L'étude a permis d'explorer, grâce à un modèle simple, le comportement vibratoire d'une structure tournante comportant une fissure. Le comportement dynamique non-linéaire du système est dû à la respiration de la fissure conduisant à une variation périodique de la rigidité globale. Trois cas ont été considérés pour décrire cette variation périodique de la rigidité :

1. dans le premier, on a considéré une rigidité sinusoïdale (H_s),
2. dans le second, une rigidité à deux niveaux (H_2),
3. et enfin, une rigidité qui reste constante sur une demi-période pour devenir sinusoïdale sur l'autre (H_3).

L'approximation

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t \quad (4.120)$$

a permis de simplifier remarquablement les développements nécessaires à l'identification des solutions périodiques du système mécanique étudié ici. En effet, elle a permis d'exprimer explicitement une inconnue du problème (φ) en fonction de l'angle de rotation du rotor Ωt (connu). Le mécanisme de respiration de la fissure ne dépend, désormais, que de la rotation du rotor. Cette simplification n'aurait pas été possible à faire sans l'hypothèse de vibrations faibles autour de la position d'équilibre sous poids propre.

Pour les trois courbes de rigidité considérées, on a pu vérifier, en comparant les solutions semi-analytiques aux résultats de l'intégration numérique du système dynamique (sans l'approximation (4.120)), la validité de notre approximation.

Certes, un faible écart par rapport à la solution numérique peut être noté pour des vitesses sous-critiques et surtout lorsque la solution analytique considérée est celle obtenue après linéarisation du système dynamique conduisant au découplage des deux oscillateurs. Pour les vitesses surcritiques cet écart est négligeable. Ainsi, notre approximation est justifiée surtout que les rotors de turbines, visés par notre étude, sont souvent exploités à des vitesses surcritiques.

Le passage du rotor par des vitesses de rotation voisines d'un sous-multiple entier de la vitesse critique conduit au phénomène de résonance super-harmonique. Ce phénomène, comme on l'a noté dans le chapitre précédent, se traduit par un niveau vibratoire élevé atteint par l'harmonique excitée (harmonique d'ordre N lorsque $\xi \approx \frac{1}{N}$) et une orbite (ou un diagramme de phase) formée de plusieurs boucles entrelacées (N boucles lorsque $\xi \approx \frac{1}{N}$).

La réponse vibratoire du système dépend des effets des harmoniques d'ordres faibles (les quelques premières harmoniques). Lorsque la vitesse de rotation de l'arbre est supérieure à la vitesse critique, on peut se limiter à la première harmonique.

La flèche statique moyenne, $|U_0|$, ainsi que le niveau vibratoire augmentent remarquablement avec la perte de rigidité (profondeur de la fissure). Au-delà de la vitesse critique, $|U_0|$ est très peu sensible aux variations de la vitesse de rotation sauf pour des pertes de rigidité importantes. Quant au niveau vibratoire, il décroît lorsque la vitesse de rotation augmente.

Le suivi continu de ces deux paramètres peut être d'une grande utilité pour la détection de l'existence ou de la propagation de fissures.

L'étude de la stabilité linéaire par la méthode de Floquet a montré l'existence de trois zones d'instabilités. La première au niveau des vitesses de rotation du rotor voisines de sous-multiples entiers de la vitesse critique, c'est la zone de résonance super-harmonique. La seconde autour de la vitesse critique où on parle de résonance exacte. La troisième zone se situe autour de $\frac{\Omega}{w_s} = 2$: il s'agit de la zone de résonance sous-harmonique.

Conclusions et perspectives

A travers ce travail de thèse, nous avons essayé de répondre aux deux problématiques suivantes :

- la première concerne l'introduction des effets de cisaillement dans l'écriture de la loi de comportement d'une section de rotor fissurée.
- La seconde porte sur les paramètres vibratoires susceptibles de favoriser la détection de fissures affectant les rotors de machines tournantes dans le cadre d'une procédure de surveillance.

Nous avons identifié, dans le second chapitre, la loi de comportement d'une section de rotor fissurée en flexion avec prise en compte des effets de cisaillement. La démarche proposée peut être appliquée à toute géométrie de fissure y compris le cas de plusieurs fissures affectant la même section. Contrairement aux modèles classiques basés sur les principes de mécanique de la rupture, la démarche proposée permet de s'affranchir d'un certain nombre d'hypothèses et d'approximations faites jusqu'à présent en profitant des performances de modélisation tridimensionnelle actuelles en mécanique statique non-linéaire.

L'étude du problème de flexion plane a montré le découplage des effets de flexion et de cisaillement au niveau de la section fissurée. Ce résultat a permis de ramener le problème d'identification de la loi de comportement à deux problèmes dissociés d'identification de lois de comportement d'une section de rotor fissurée. Le premier, résolu, auparavant, par Andrieux et Varé [5] consiste à l'étude en flexion bi-axée de la section fissurée. La seconde loi de comportement, identifiée ici, est relative au comportement de la section fissurée soumise uniquement à des efforts de cisaillement. L'exploitation des propriétés de la fonction énergie élastique du problème a permis de réduire sa résolution à l'identification d'une fonction de souplesse sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il s'agit, comme l'a démontré Andrieux [4] dans le cas de la flexion bi-axée, d'une souplesse additionnelle apportée par la fissure dépendant de la direction du chargement subi par la section fissurée.

En particulier, nous avons remarqué un effet faible du cisaillement sur la réponse statique de l'élément de rotor dont une section est affectée de fissures. Ainsi, le mécanisme de respiration de la fissure dépend principalement de l'état des contraintes normales au niveau de la section fissurée.

En revanche, un couplage torsion-flexion dû à la présence de la fissure a été mis en évidence.

Ainsi, la présence des modes de flexion dans le spectre de la réponse du rotor à une vibration en torsion et vice versa est un bon indicateur de la présence de fissures.

Pour certaines structures industrielles à axe vertical, l'ensemble des sollicitations extérieures se réduit principalement aux effets de l'effort normal dû au poids propre de la structure. Il serait, certes, intéressant d'introduire ces effets dans la loi de comportement de la section de poutre fissurée afin de couvrir un champ d'application plus vaste.

L'exploration par voie numérique de la réponse d'un rotor affecté de fissures a été investie dans le troisième chapitre de cette thèse. Trois modèles ont été proposés. Le premier est un modèle à deux paramètres dont l'intégration numérique directe a permis de faire les constatations suivantes :

- le glissement des fréquences de résonance est faible et ne peut, à lui seul, être utilisé pour le suivi de l'état des machines. En effet, une baisse des fréquences de résonance peut résulter de l'apparition de jeux au niveau des paliers ou une augmentation de température,
- le passage du rotor à des vitesses de rotation voisines de sous-multiples entiers de la vitesse critique conduit au phénomène de résonance super-harmonique caractérisé par le changement de la forme des orbites et des diagrammes de phase d'une part et de niveaux vibratoires élevés atteints par les harmoniques d'ordres supérieurs, d'autre part ($2\times, 3\times, \dots$).

Le second modèle consiste à représenter les parties saines par des éléments de type poutre de Timoshenko et à les relier par un élément nodal dont la loi de comportement non-linéaire est identifiée à partir de calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure. La technique de pénalisation a été adoptée pour tenir compte de la condition de contact unilatéral au moment de la fermeture totale de la fissure. Pour l'intégration temporelle directe du système dynamique résultant, nous avons utilisé le schéma de HHT dans le but d'introduire de l'amortissement numérique dans la solution et amortir, par conséquent, les hautes fréquences numériques (sans sens physique) sans dégrader la précision. Ce modèle a été utilisé par la suite pour l'examen des effets du cisaillement sur la réponse vibratoire du rotor fissuré et a montré la faiblesse de ces effets même pour de fissures profondes.

Le troisième modèle consiste à construire une matrice de rigidité d'un élément de rotor fissuré et de l'assembler avec celles des éléments sains comme dans le cas linéaire. Cette technique a permis, d'une part, de tenir compte de façon exacte des conditions de contact unilatéral entre les lèvres de la fissure et, d'autre part, de réduire remarquablement les coûts de l'intégration numérique en permettant l'emploi de pas de temps relativement élevés par rapport à ceux utilisés dans l'intégration du second modèle.

Les différents modèles décrits ci-dessus sont paramétrés et peuvent servir à l'étude de structures réelles. En outre, ils permettent :

- de considérer différentes données géométriques,
- de prendre en compte l'éventuelle présence de disques,
- de changer les conditions d'appui du rotor (appuis simples, encastresments,...),
- de tenir compte des effets gyroscopiques,
- de considérer le cas de plusieurs fissures et de pouvoir changer leurs emplacements le long du rotor.

On pourrait, par exemple, envisager, grâce à ces modèles, l'étude de stabilité d'un rotor de dimensions réelles en présence de plusieurs fissures situées à de différents endroits constatés au cours des retours d'expérience réalisés sur les parcs d'EDF.

La recherche de solutions analytiques (ou semi-analytiques) pour un système dynamique à 2 ddl a été développée dans le dernier chapitre. Trois fonctions de variation périodique de la rigidité globale de la structure ont été considérées. La résolution du système différentiel résultant a été menée par la méthode de la balance harmonique et a permis d'observer, outre les deux phénomènes décrits ci-dessus, l'augmentation du niveau vibratoire et de la flèche statique totale moyenne avec la perte de rigidité due à la présence de fissures. Ces deux derniers paramètres peuvent être d'une grande utilité pour les exploitants de machines tournantes qui visent la détection de la présence d'éventuelles fissures affectant leurs matériels. En effet, contrairement au phénomène de résonance super-harmonique dont l'observation est possible au cours du démarrage ou de l'arrêt des machines, le suivi de ces deux paramètres peut se faire en ligne. Ceci permet, d'une part, de limiter les indisponibilités des matériels et, d'autre part, d'éviter les passages répétés par les fréquences de résonance conduisant à des amplitudes vibratoires importantes favorisant la propagation des fissures existantes et l'apparition de nouvelles fissures.

Le faible niveau de sensibilité des fréquences de résonance à la présence de fissures nous conduit à conclure que ce paramètre seul ne peut être exploité pour détecter un affaiblissement de structure si on tient compte des erreurs possibles de mesure dans un processus de surveillance. En revanche, la mesure du glissement des fréquences de résonance, l'examen de l'évolution du niveau vibratoire et celle de la flèche statique totale moyenne peuvent ensemble fournir une information complète sur l'éventuelle présence de fissures dans un élément de structure. Il existe, par la suite, plusieurs méthodes et techniques plus ou moins précises permettant de localiser de tels défauts. Certaines de ces techniques telles que le ressuage et la magnétoscopie nécessitent un examen statique. D'autres, telles que le contrôle ultrasonore peuvent être menées en ligne. Cependant, le niveau de bruit très élevé dans les centrales de production d'énergie et le besoin d'éviter l'arrêt des machines exigent le développement de méthodes plus adaptées.

Parmi les méthodes [52] qui méritent d'être examinées de près celle basée sur l'examen des déformés modales. Elle consiste à repérer un mode fortement perturbé par la présence de la fissure et un autre mode qui ne l'est pas. Sachant que si un mode est fortement perturbé,

la fissure se trouve à proximité d'un de ses ventres de vibration, s'il ne l'est pas, on peut déduire que la fissure se situe près d'un de ses noeuds. La fissure a donc une très forte probabilité d'être à proximité du ventre et du noeud les plus proches.

Bibliographie

- [1] O. N. L. Abraham, J. A. Brandon, and A. M. Cohen. remark on the determination of compliance coefficients at the crack section of a uniform beam with circular cross section. *J. Sound Vib.*, 169(2) :570–574–430, 1994.
- [2] A. E. Aktan, K. L. Lee, C. Chuntavan, and T. Aksel. Modal testing for structural identification and condition assesment of constructed facilities. In *12th International Modal Analysis Conf.*, volume 1, pages 462–468, Honolulu, Hawaii, 1994.
- [3] S. Andrieux. Raccord poutre-3d, coque-3d et généralisations. rapport interne HI-70/96/006, EDF-DER, 1996.
- [4] S. Andrieux. Détermination de la loi de comportement en flexion bi-axée d’une poutre fissurée avec prise en compte du contact sur les fissures. rapport interne HP-50/99/018/A, EDF-DER, 2000.
- [5] S. Andrieux and C. Varé. A 3d cracked beam model with unilateral contact- application to rotors. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 21 :793–810, 2002.
- [6] N. Anifantis. *Stability of cracked columns*. PhD thesis, University of Patras, 1978.
- [7] N. Anifantis and A. D. Dimarogonas. Identification of peripheral cracks in cylindrical shells. In *ASME-Wint. Ann. Meet.*, Boston, Mass., USA, 1983.
- [8] N. Anifantis and A. D. Dimarogonas. Imperfection post-buckling analysis of cracked columns. *ENG. Fract. Mech.*, 18 :693–702, 1983.
- [9] N. Anifantis and A. D. Dimarogonas. Stability of cracked columns with a single crack subjected to follower and vertical loads. *Int. J. Solids ans Structures*, 19 :281–291, 1983.
- [10] S. Audebert and P. Voinis. Comportement dynamique de rotors avec fissuration transverse : modélisation et validation expérimentale. In *13 ème colloque Vib. Chocs et bruits*, Lyon, France, 2000.

- [11] N. Bachschmid, N. Diana, and B. Pizzigoni. The influence of unbalance on cracked rotors. In *Conf. Vib. Rotat. Mach.*, U.K, 1980.
- [12] N. Bachschmid, P. Pennacchi, E. Tanzi, and S. Audebert. Transverse crack modeling and validation in rotor systems including thermal effects. *Int. J. of Rotat. Mach.*, 10(4) :253–263, 2004.
- [13] N. Bachschmid, P. Pennacchi, P. Tanzi, E. and Verrier, F. Hasnaoui, and K. Abadi. Crack detectability in vertical axis cooling pumps during operation. *Int. J. of Rotat. Mach.*, 9 :303–311, 2003.
- [14] N. Bachschmid, P. Pennacchi, and A. Vania. Identification of multiple faults in rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, 254(02) :327–366, 2002.
- [15] N. Bachschmid and E. Tanzi. Deflections and strains in cracked shafts due to rotating loads : A numerical and experimental analysis. *Int. J. of Rotat. Mach.*, 9 :303–311, 2003.
- [16] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis : Poutres et plaques*, volume 2. Hermès Editeur, Paris, 1990.
- [17] T. Belytschko, T.J.R. Thomas J. R. Hughes, and K.J. Bathe. *Computational methods in mechanics : Computational Methods for Transient Analysis*, volume 1. North-Holland, 1983.
- [18] D.E. Bently and A. Muszynska. Detection of rotor cracks. In *15th Turbomachinery Symposium*, Texas, 1986.
- [19] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos- vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann Editeurs des sciences et des arts, Paris, 1992.
- [20] G. Blanchet and M. Charbit. *Signaux et images sous Matlab*. Hermes science publications, Paris, 2001.
- [21] F. Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Z. Phys.*, 52 :555–600, 1928.
- [22] M. Bonnet. *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*. Notes de cours, Ecole Polytechnique, 2005.
- [23] F. W. Brown and J. E. Srawley. Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials. *ASTM STP*, 410 :12, 1966.
- [24] H. F. Bueckner. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *Trans. ASME*, 80 :1225–1229, 1958.

- [25] H. F. Bueckner. Some stress singularity and their computation by means of integral equations. In R. E. Langer, editor, *boundary value problems in differential equations*, pages 215–230, Madison, Wisconsin, USA, 1960. University of Wisconsin Press.
- [26] J. A. Bush. Experimentally determined sif for single edge crack round bars loaded in bending. *Experimental Mechanics*, pages 249–257, july 1984.
- [27] T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, and J. Yao. Vibration of a beam with a breathing crack. *J. Sound and Vibration*, 239(1) :57–67, 2001.
- [28] R. J. Comparin and R. Singh. Non-linear frequency response characteristics of an impact pair. *J. Sound Vib.*, 134 :259–290, 1989.
- [29] W. Cooley, J. and J. W. Tuckey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. of Comp.*, 19 :297–301, 1965.
- [30] A. K. Darpe, K. Gupta, , and A. Chawla. Analysis of the response of a cracked jeffcott rotor to axial excitation. *J. Sound Vib.*, 249(3) :429–445, 2002.
- [31] A. K. Darpe, K. Gupta, , and A. Chawla. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor. *J. Sound Vib.*, 269 :33–60, 2004.
- [32] A. K. Darpe, K. Gupta, , and A. Chawla. Transient response and breathing behaviour of a cracked jeffcott rotor. *J. Sound Vib.*, 272 :207–243, 2004.
- [33] A. K. Darpe, K. Gupta, and A. Chawla. Dynamics of a two-crack rotor. *J. Sound Vib.*, 259(3) :649–675, 2003.
- [34] W.G.R. DAVIES and I.W. Mayes. The vibrational behaviour of multi-shaft, multi-bearing system in the presence of the propagating transverse crack. *J. Vib. Acous. Stress Reliab. Design*, 106 :146–153, 1984.
- [35] A. D. Dimarogonas. Dynamic response of cracked rotors. Internal report, General Electric Co., Schenectady NY, 1970.
- [36] A. D. Dimarogonas. Dynamics of cracked shafts. Internal report, General Electric Co., Schenectady NY, 1971.
- [37] A. D. Dimarogonas. *Vibration engineering*. West Publishers, St Paul, 1976.
- [38] A. D. Dimarogonas. Buckling of rings and tubes with longitudinal cracks. *Mech. Res. Comm.*, 8 :179–186, 1981.
- [39] A. D. Dimarogonas. Crack identification of in aircraft structures. In *First National aircraft conf.*, Athens, 1982.

- [40] A. D. Dimarogonas. A fuzzy logic neural network structured expert system shell for diagnosis and prognosis- users manual. In *EXPERTS*, Clayton laboratories, St Louis, Missouri, USA, 1987.
- [41] A. D. Dimarogonas. A general purpose rotor dynamic analysis program- users manual. In *RODYNA*, Clayton laboratories, St Louis, Missouri, USA, 1988.
- [42] A. D. Dimarogonas. A brief history of rotor dynamics. In *Rotordynamics*, volume 92, Venise, 1992. Springer.
- [43] A. D. Dimarogonas. autor's reply. *J. Sound and Vibration*, 169 :575–576, 1994.
- [44] A. D. Dimarogonas. Vibration of cracked structures : A state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55 (5) :831–857, 1996.
- [45] A. D. Dimarogonas and S. A. Paipetis. *Analytical methods in rotor dynamics*. Applied science Publishers, 1983.
- [46] F. M. Dimentberg. *Flexural vibration of rotating shafts*. Butterworths, London, 1961.
- [47] B. O. Dirr and B. K. Schmalhorst. Crack depth analysis of a rotating shaft by vibration measurement. *ASME J. Vib. Acous. Stres. Relia. Des.*, 110 :158–164, 1988.
- [48] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [49] S. El Arem, S. Andrieux, C. Varé, and P. Verrier. Loi de comportement en flexion d'une section de poutre fissurée avec prise en compte des effets de cisaillement. In *6ème colloque nationale en calcul des structures*, volume II, pages 223–230, Giens, 2003.
- [50] R. D. Entwistle and B. J. Stone. Survey of the use of vibration methods in the assessment of component geometry. *Vib. and Noise Meas. Pred. and Cont., Inst. engineers, Australia*, 90 :210–217, 1990.
- [51] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. Scien. Ecole Nor. Sup.*, 2ème série :3–132, 1879.
- [52] C. H. J. Fox. The localisation of defects in structures : a comparison of the use of natural frequency and mode shape data. In *10th International Modal Analysis Conf.*, volume 1, pages 522–528, San Diego, CA, USA, 1992.
- [53] R. Gasch. Dynamical behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack. In *Vibrations in rotating machinery*, pages 123–128, I. Mech. E. Conference, London, 1976.

- [54] R. Gasch. A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack. *J. Sound and vibration*, 160 :313–332, 1993.
- [55] R.-J. Gibert. *Vibrations des structures : Interactions avec les fluides, Sources d'excitation aléatoires*. Eyrolles, Paris, 1988.
- [56] A. Girard and N. Roy. *Dynamique des structures industrielles*. Hermès Sci. Publict., Paris, 2003.
- [57] C. G. Go and Y. S. Lin. Infinitely small element for dynamic problem of cracked beam. *Eng. Fract. Mech.*, 48(4) :475–482, 1994.
- [58] M. Géradin and A. Cardona. Time integration of the equation of motion in mechanism analysis. *Computers and Structures*, 33(3) :801–820, 1989.
- [59] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1992.
- [60] B. Gross and J. E. Srawley. Stress intensity factors for a single-edge-notch tension specimen in bending or combined and tension by boundary collocation of a stress function. Tech. Note D-2395, NASA, 1964.
- [61] B. Gross and J. E. Srawley. Stress intensity factors for a single-edge-notch tension specimen in bending or combined and tension by boundary collocation of a stress function. Tech. Note D-2603, NASA, 1965.
- [62] P. Gudmundson. Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. *J. Mech. Phys. Solids*, 30(5) :339–353, 1982.
- [63] P. Gudmundson. The dynamical behavior of slender structures with cross-sectional cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 31 :329–345, 1983.
- [64] J. B. Hamidi, L. and Piaud, Mansour W. M., and M. Massoud. Modal parameters for cracked rotors : models comparaison. *J. Sound and Vibration*, 175(2) :265–278, 1994.
- [65] J. B. Hamidi, L. and Piaud and M. Massoud. A study of cracks influence on the modal characteristics of rotors. In *5th Int. Conf. Vib. Rotat. Mach.*, pages 283–288, University of Bath, UK, 1992.
- [66] L. Hamidi. *Détection et localisation de fissures d'arbres tournant par analyse modale*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada, 1994.
- [67] J. A. Henry. Three dimensional calculations of the stress intensity in a cracked 500mw lp shafts. CEGB report SSD/SW/N14, S. W. Region, S. S. D., EDF-DER, 1975.

- [68] T. A. Henry and Okah-Avae. Vibrations in cracked shafts. In *Vibrations in rotating machinery*, pages 15–19, Inst. Mech. E. Conference, London, 1976.
- [69] H. M. Hilber, T.J.R. Hughes, and Taylor R.L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 :283–293, 1977.
- [70] G. W. Hill. On the part of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Math.*, 8 :1–36, 1886.
- [71] I. Imam, S. H. Azzaro, R. J. Bankert, and I. Scheibel. Developement of an on-line rotor crack detection and monitoring system. *J. Sound and Vib.*, 111 :241–250, 1989.
- [72] G. R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a cracktraversing a plate. *J. App. Mech.*, 24 :361–364, 1957.
- [73] G. R. Irwin. Relation of stresses near a crack to the crack extension force. In *9th Cong. App. Mech.*, Brussels, 1957.
- [74] O. S. Jun and H. J. Eun. Modelling and vibration analysis of a simple rotor with a breathing crack. *J. Sound and Vibration*, 155(2) :273–290, 1992.
- [75] A. Kikuchi and J.T. Oden. Contact problem in elasticity : a study of variational inequalities and finite element method. In *Siam*, Philadelphia, 1988.
- [76] P. G. Kirmsher. The effects of discontinuities on the natural frequency of beams. *Proc. american Society of Testing and Materials*, 44 :897–904, 1944.
- [77] M. Krawwczuk. A cracked timoshenko beam finite element. In *17 International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, 1991.
- [78] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley & Sons, England, 1990.
- [79] H. Liebowitz and D. W. Claus. Carrying capacity of notched columns. *Eng. Fract. Mech.*, 1 :379–384, 1968.
- [80] H. Liebowitz, H. Vanderveldt, and W. D. Harris. Failure of notched columns. *Int. J. Solids Struct.*, 3 :489–500, 1967.
- [81] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's equation*. Interscience Publishers, New York, 1966.
- [82] E. Mathieu. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *J. Math.*, 13 :137–203, 1868.

- [83] I.W. Mayes and W.G.R. Davies. The vibrational behaviour of a rotating shaft system containing a transverse crack. In *Vibrations in rotating machinery*, pages 53–65, Inst. Mech. E. Conference, London, 1976.
- [84] I.W. Mayes and W.G.R. Davies. crack propagation in rotating shafts. In *ASME Conference on mechanical vibrations*, Chicago, 1977.
- [85] I.W. Mayes and W.G.R. DAVIES. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containig a transverse crack in a rotor. *J. Vib. Acous. Stress Reliab. Design*, 106 :139–145, 1984.
- [86] A. H. Nayfeh. *Problems in perturbation*. John Wiley & Sons, 1985.
- [87] A. H. Nayfeh. *Perturbation methods*. Wiley-Interscience, 2000.
- [88] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics*. Wiley series in nonlinear science, 1994.
- [89] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [90] Q.S. NGUYEN. *Stabilité des structures élastiques*. Springer-Verlag, Paris, 1995.
- [91] Q.S. NGUYEN. *Stabilité et mécanique non linéaire*. Hermès, Paris, 2000.
- [92] H. Okamura, H. W. Liu, C.-S. Chu, and H. Liebowitz. A cracked column under compression. *Eng. Fract. Mech.*, 1 :547–564, 1969.
- [93] W. M. Ostachowicz and M. Krawwczuk. Vibration analysis of a cracked beam. *Comput. Struct.*, 36(2) :245–250, 1990.
- [94] W. M. Ostachowicz and M. Krawwczuk. Coupled torsional and bending vibrations of a rotor with an open crack. *Arch. App. Mech.*, 62 :191–201, 1992.
- [95] T. Pafelias. Dynamic response of a cracked rotor. Technical Information Series DF-74-LS-79, General Electric Co., 1974.
- [96] A. Palamà. On saint-venant’s principle in three-dimensional elasticity. *Meccanica*, 11 :98–101, 1976.
- [97] C. A. Papadopoulos. Coupling of bending and torsional vibration of a cracked timoshenko beam. *J. Sound and Vibration*, 278 :1205–1211, 2004.
- [98] C. A. Papadopoulos and A. D. Dimarogonas. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *J. Sound vibration*, 117 :81–93, 1987.

- [99] C. A. Papadopoulos and A. D. Dimarogonas. Coupling of bending and torsional vibration of a cracked timoshenko beam. *Ing. Arch.*, 57 :496–505, 1987.
- [100] C. A. Papadopoulos and A. D. Dimarogonas. Stability of cracked rotors in the coupled vibration mode. In *ASME-11th Bien. Conf. Mech. Vib. Noise*, pages 25–34, Boston, Mass., USA, 1987.
- [101] C. A. Papadopoulos and A. D. Dimarogonas. Coupled vibrations of cracked shaft. *J. Vib. Acoust.*, 114 :461–467, 1992.
- [102] J. Pellet. Raccord poutre-3d. Manuel de référence du Code-Aster R3.03.03, EDF-DER, 1995.
- [103] J. R. Rice and N. Levy. The part-through surface crack in an elastic plate. *J. App. Mech.*, 39 :185–194, 1972.
- [104] P. F. Rizos, N. Aspragathos, and A. D. Dimarogonas. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *J. Sound and Vibration*, 138(3) :381–388, 1990.
- [105] P. N. Saavedra and L. A. Cuitino. Crack detection and vibrational behavior of cracked beams. *Comput. Struct.*, 79 :1451–1459, 2001.
- [106] O. S. Salawu. Detection of structural damage through changes in frequency : a review. *Eng. Struct.*, 19(9) :718–723, 1997.
- [107] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*, volume II thermoélasticité. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.
- [108] A. W. Sinou, J. J. Lees. The influence of cracks in rotating shafts. *J. Sound Vib.*, 285 :1015–1037, 2005.
- [109] J.C. SOL. Vibration d'un arbre anisotrope- étude théorique. rapport interne P34-227, EDF-DER, 1981.
- [110] J. N. Sundermeyer and R. L. Weaver. On crack identification and characterization in a beam by nonlinear vibration analysis. *J. Sound vibration*, 183 :857–871, 1995.
- [111] H. Tada, P. Paris, and G. Irwin. *The stress analysis of cracks handbook*. Del Research Corporation, Hellertown, pennsylvania, USA, 1973.
- [112] W. J. Thomson. Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness. *J. APP. Mech.*, 17 :203–207, 1943.
- [113] A. Tondl. *Some problem of rotor dynamics*. Chapman & Hall, 1965.

- [114] C. Varé. Calcul d'un modèle de rotor fissuré pour le code cadyro. rapport interne HP-54/99/047/B, EDF-R et D, 2000.
- [115] C. Varé and S. Andrieux. Modélisation d'une section de poutre fissurée-application aux rotors de turbine. *Revue Française de Mécanique*, 2000(2) :91–97, 2000.
- [116] C. Varé and S. Andrieux. Modélisation d'une section de poutre fissurée en flexion : prise en compte des efforts tranchants. In *7ème colloque nationale en calcul des structures*, volume II, pages 29–34, Giens, 2005.
- [117] P. Verrier and S. El Arem. Calcul d'un modèle de rotor fissuré avec prise en compte de l'effort tranchant-cas de la flexion plane. rapport interne HT-65/03/009/A, EDF-DER, 2003.
- [118] J. Wauer. Modelling and formulation of equations of motion for cracked rotating shafts. *Int. J. Solids Structures*, 26(9) :901–914, 1990.
- [119] J. Wauer. On the dynamics of cracked rotors : A literature survey. *Applied Mechanical Reviews*, 43, 1 :13–17, 1990.
- [120] D. Wendtland. *änderung der biegeeigenfrequenzen einer idealisierten schaufel durch risse*. PhD thesis, University of Karlsruhe, 1972.
- [121] D. Wendtland and E. Wiederuth. *Forsch. Ingenieurwes.* 1974.
- [122] R. A. Westmann and W. H. Yang. Stress analysis of cracked rectangular beams. *J. APP. Mech.*, 32 :639–701, 1967.
- [123] C. Zammali. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2005.
- [124] H. Ziebarth and R. J. Baumgartner. early detection of cross-sectional rotor cracks by turbine shaft vibration monitoring techniques. *ASME*, Paper 81-JPGC-Pwr-26, 1981.
- [125] H. Ziebarth, H. Scherdtfeger, and E. E. Muhle. Auswirkung von querissen auf das schwingungsverhalten von rotoren. *VDI-Berichte*, 320 :37–43, 1978.
- [126] L. Zuo. *Etude du comportement dynamique des systèmes linéaires par morceaux-contribution à la détection des fissures dans les arbres de machines tournantes*. PhD thesis, EPFL, 1992.
- [127] L. Zuo and A. Curnier. Nonlinear real and complex modes of conewise linear systems. *J. Sound and Vib.*, 174(3) :289–313, 1994.

Résumé : Dans ce travail de thèse, on s'intéresse à la réponse vibratoire d'un rotor affecté de fissures afin d'exhiber les paramètres vibratoires susceptibles de favoriser leur détection dans le cadre d'une procédure de surveillance.

Dans un premier temps, les travaux expérimentaux, numériques et analytiques antérieurs effectués visant la modélisation de telles structures sont résumés et commentés. Puis la démarche de la prise en compte des effets de cisaillement dans la loi de comportement en flexion d'une section de rotor fissurée est présentée et est validée par des calculs tridimensionnels tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de fissure. La démarche est basée sur une formulation énergétique du problème et peut être appliquée à toute géométrie de fissure.

L'exploration par voie numérique de la réponse d'un rotor fissuré est présentée dans le troisième chapitre de cette thèse. Différents systèmes dynamiques sont considérés. Les parties saines du rotor sont représentées par des éléments de type barre ou poutre, et la section fissurée par un ressort non-linéaire pour tenir compte du mécanisme de respiration de la fissure. Vers la fin de cette partie, on présente une méthode originale de construction d'un élément fini de poutre comportant des fissures.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude analytique du système à deux ddl. Ainsi, plusieurs fonctions de respiration de la fissure sont examinées. La stabilité linéaire des solutions périodiques est étudiée vers la fin de ce chapitre par la théorie de Floquet. Finalement quelques paramètres vibratoires sont proposés comme indicateurs de la présence de fissures.

Mots clefs : Rotor, fissure, contact unilatéral, intégration numérique, éléments finis, dynamique non-linéaire des structures.

Abstract : The aim of this work is to study the dynamic response of a cracked rotor to establish some possibilities for early on line crack detection.

First, a review on experimental, numerical and analytical works on the dynamics of cracked rotors is given. Then, an original method of calculating the behavior of a cracked beam section in bending with shearing effects is presented. The nonlinear behavior relations are derived from a three-dimensional model taking into account the unilateral contact conditions on the crack's lips. Based on an energy formulation, this method could be applied to any geometry of crack.

The exploration by different numerical integration methods of the vibratory response of some models of cracked rotors is presented in the third chapter of this thesis. The uncracked parts of the rotor are represented by elements of bar or beam type, and the cracked section by a nonlinear spring taking into account the breathing mechanism of the cracks. At the end of this part, an original method of construction of a finite element of a cracked beam is presented.

The final chapter is devoted to the analytical study of the system with two dof. The breathing mechanism of the crack is taken into account by considering specific periodic variation of the global stiffness of the system. The differential equations system is solved using the harmonic balance method. The linear stability of the periodic solutions is studied by the Floquet theory. Some vibratory parameters are proposed as crack indicators.

Key words : Rotor, crack, unilateral contact, numerical integration, finite element, structural nonlinear dynamics.